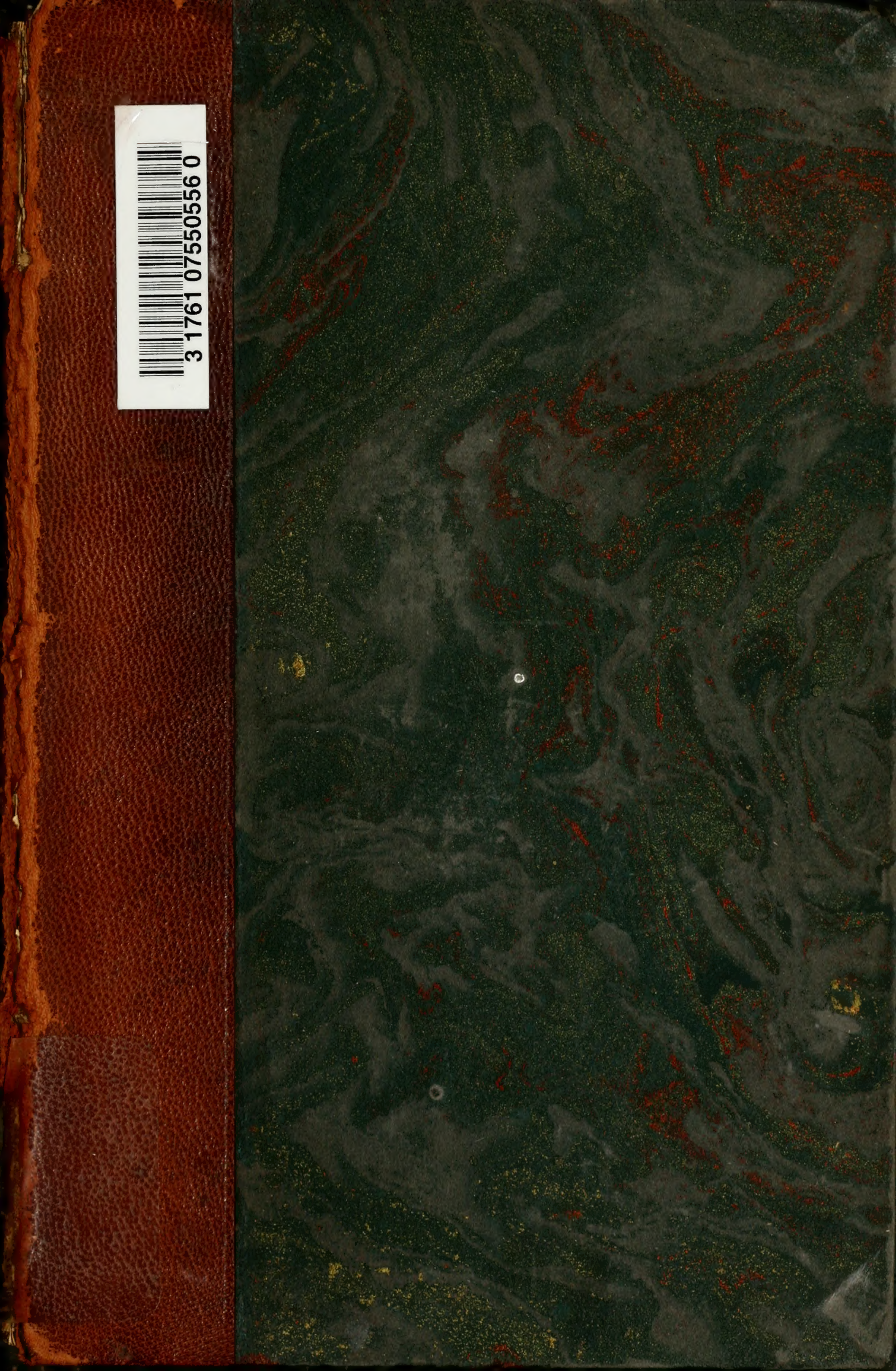
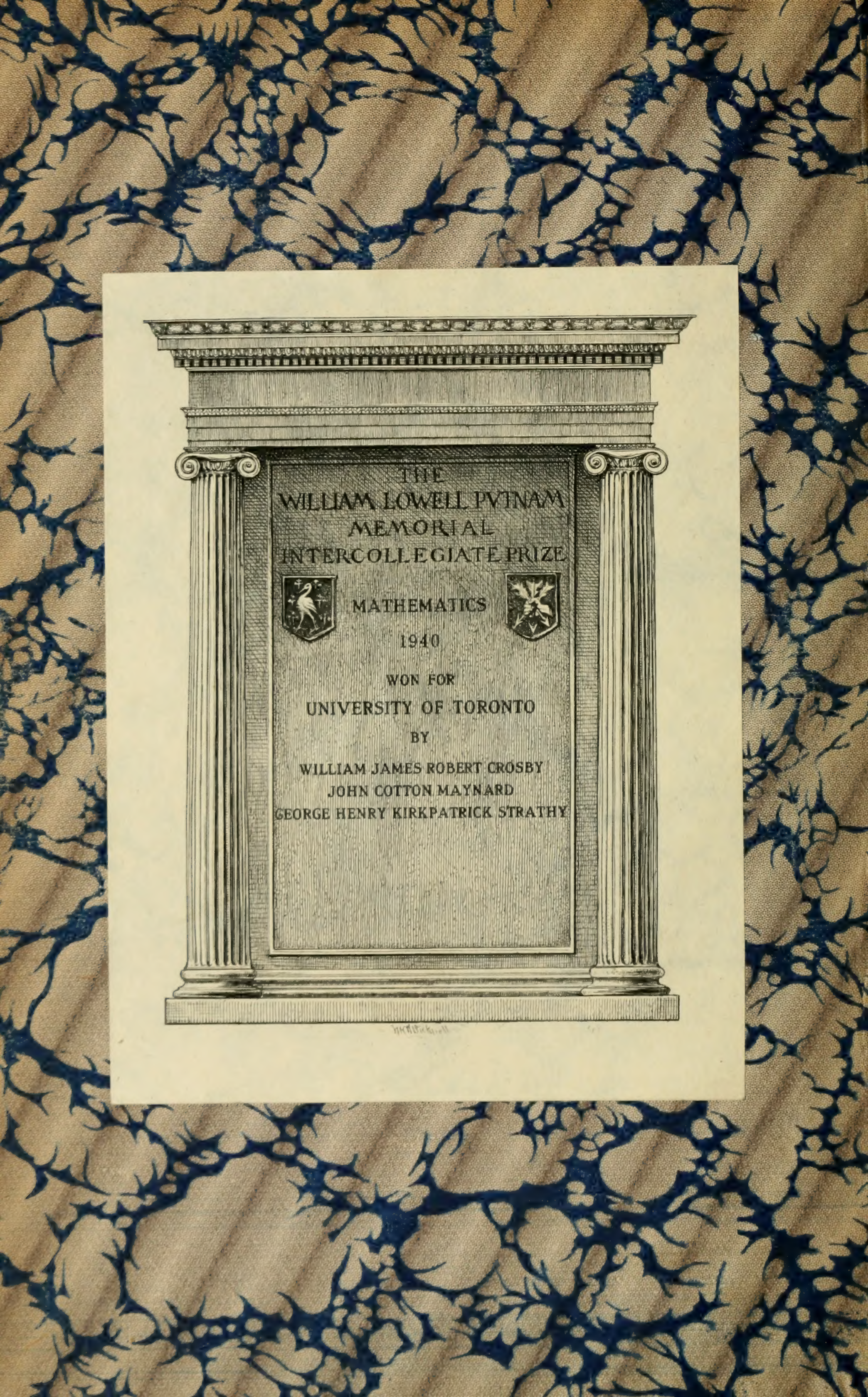
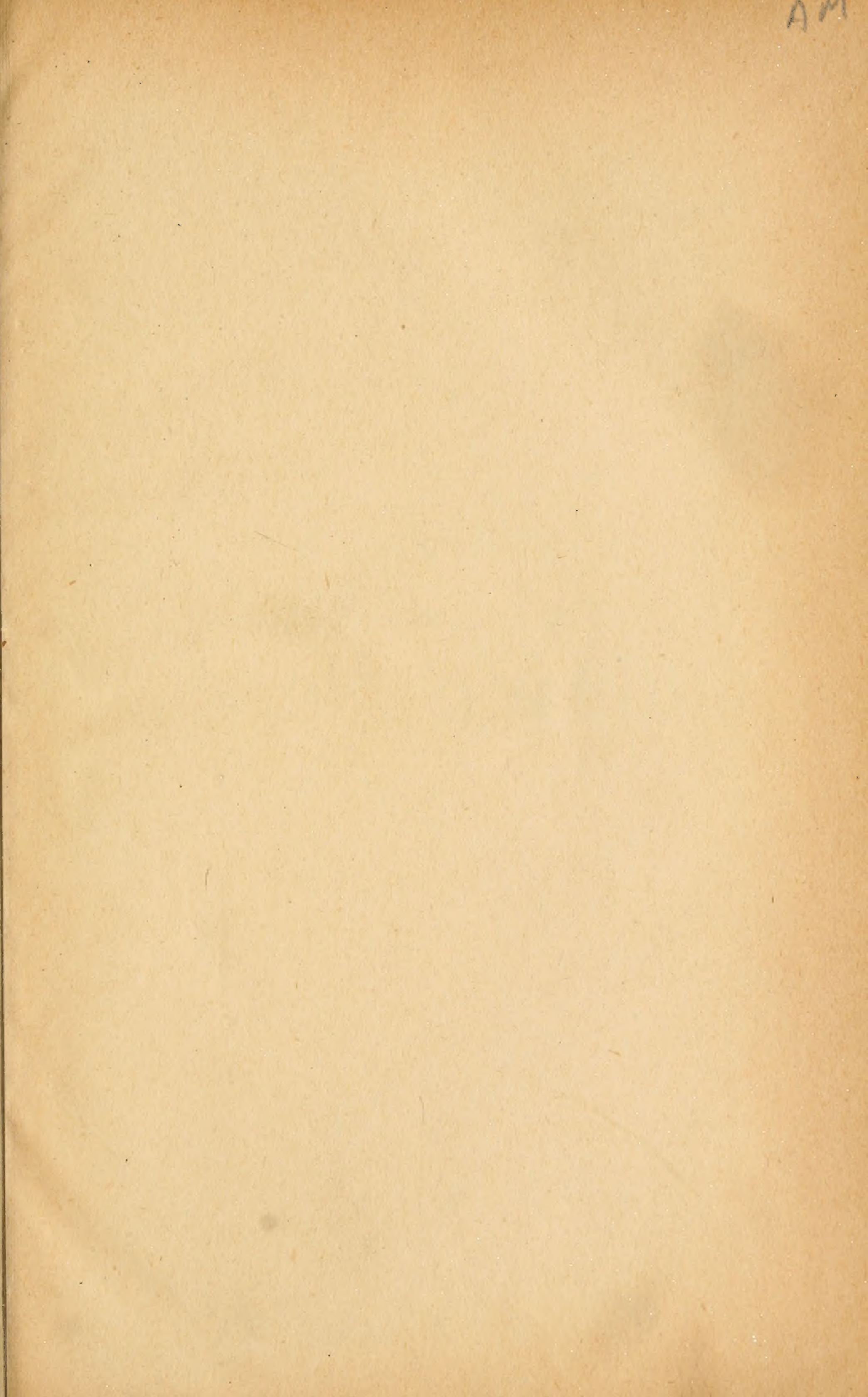

3 1761 07550556 0


THE
WILLIAM LOWELL PUTNAM
MEMORIAL
INTERCOLLEGIATE PRIZE
MATHEMATICS
1940
WON FOR
UNIVERSITY OF TORONTO
BY
WILLIAM JAMES ROBERT CROSBY
JOHN COTTON MAYNARD
GEORGE HENRY KIRKPATRICK STRATHY




AM

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
67066 Quai des Grands-Augustins, 55.

Mat
H

QA 37 H3

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME III.

MÉCANIQUE.



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

A 15913
23.9.43

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

QA
37
H3
t.3



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE.

Ce Tome III de mon Cours complet de Mathématiques spéciales devait primitivement comprendre la Mécanique, la Géométrie descriptive et la Trigonométrie. J'ai pensé depuis qu'il valait mieux publier à part la Mécanique, qui pourra intéresser une certaine catégorie de lecteurs, auxquels la Géométrie descriptive eût été inutile. Cette dernière partie de mon programme fera, avec la Trigonométrie, l'objet d'un quatrième et dernier Volume.

Il y a bien des manières d'enseigner la Mécanique. On peut présenter cette science comme une branche des Mathématiques ou comme une partie de la Physique [1]. On peut indifféremment commencer ou terminer par la Statique. Quant aux principes ou axiomes fondamentaux, ils peuvent revêtir bien des formes diverses, qui les laissent néanmoins identiques dans le fond. Chaque auteur adopte le mode d'exposition le plus conforme à sa tournure d'esprit et peut-être aussi à son éducation antérieure.

Je me suis inspiré, dans le présent Ouvrage, des excellentes leçons développées par M. Painlevé à la Faculté des Sciences de Paris, pendant l'année scolaire 1904-1905 [2].

---

[1] Et d'ailleurs, elle est enseignée, dans nos lycées, à la fois par les Mathématiciens et par les Physiciens.

[2] J'ai exposé en détail les idées fondamentales qui ont toujours servi de base à mon enseignement de la Mécanique, dans un article intitulé : *Sur les principes de la Mécanique*, publié par la *Revue générale des Sciences*, le 15 février 1915.

Tout d'abord, je me suis efforcé de faire ressortir l'origine expérimentale de la Mécanique, tout en prouvant qu'on en peut donner un exposé entièrement abstrait, comme de n'importe quelle théorie mathématique.

J'ai placé en premier lieu l'étude de la Cinématique, parce que c'est elle qui nécessite le moins de notions nouvelles et se rapproche le plus de la Géométrie. J'ai ensuite exposé la Dynamique et enfin la Statique, que j'ai considérée comme un cas particulier de la Dynamique.

J'ai consacré tout un Chapitre aux principes fondamentaux de la Dynamique et, si j'ai cru devoir insister sur ce sujet, ce n'est pas seulement en raison de l'intérêt philosophique de la question, mais aussi et surtout parce que j'ai souventes fois constaté que les élèves, faute d'y avoir consacré une attention suffisante, commettent de grossières erreurs de principe, qui les conduisent à des résultats totalement erronés, dans des problèmes parfois très simples. Ils se fient à leur sens intuitif de la Mécanique, plutôt que de raisonner correctement à partir des axiomes et des définitions, ce qui est le seul moyen de ne pas se tromper. Le trièdre de référence leur importe peu et s'ils en changent au cours d'une question, il leur arrive d'oublier la répercussion que cela entraîne sur les forces. Ils parlent de la force centrifuge, mais ne savent pas expliquer en quoi elle consiste.

La notion de *force relative*, que j'ai empruntée à M. Painlevé, me paraît éminemment propre à préciser leurs idées sur ce point de vue. Elle a, en outre, l'avantage de présenter la force sous son aspect le plus clair, puisqu'elle la ramène simplement au vecteur accélération, au lieu d'en faire une entité plus ou moins mystérieuse, que l'on s'efforce ensuite de rattacher à la notion de mouvement.

Certes, cette définition est purement conventionnelle. Mais, quelle définition ne l'est pas? Et d'ailleurs, ce caractère conven-

tionnel me paraît même être un avantage au point de vue pédagogique, parce qu'il fait mieux ressortir la relativité de la notion de force et évite aux élèves les erreurs auxquelles je faisais allusion tout à l'heure.

A côté de la force relative, j'ai introduit, toujours d'après M. Painlevé, la *force absolue*, qui me paraît être la seule à laquelle on puisse reconnaître un caractère objectif, parce qu'elle est la conséquence dynamique de toute modification physique du milieu.

Cette force absolue, qui est indépendante du trièdre de référence, ne doit pas être confondue avec la force absolue de Galilée, que battent en brèche les théories d'Einstein et qui n'est autre que la force relative à un trièdre de référence particulier, que l'on convient de regarder comme définissant l'espace absolu. Ces axes de Galilée n'interviennent qu'en Mécanique céleste et c'est pourquoi il m'a paru inutile d'en faire mention à propos des principes généraux de la Dynamique; j'en ai simplement dit un mot à propos du mouvement des planètes (n° 93).

Abstraction faite de ce dernier paragraphe, mes lecteurs n'auront donc pas à se demander s'ils sont ou ne sont pas des disciples d'Einstein. L'existence ou la non-existence d'un espace absolu, par rapport auquel on peut énoncer la loi de gravitation newtonienne, ne doit pas les préoccuper dans cet Ouvrage. Et cela tient, au fond, à ce que je me suis placé à un point de vue purement expérimental, je dirai même empirique, puisque je laisse aux physiciens le soin de construire expérimentalement la loi de force relative à un trièdre de référence déterminé, dans un milieu déterminé (*cf.* n° 50).

Il est évident que si l'on admet l'existence métaphysique de la force (ce que, pour ma part, je ne suis jamais arrivé à concevoir clairement), ou si l'on veut élaborer une vaste synthèse de

la Mécanique et de la Physique, ce point de vue simpliste doit être abandonné; il faut choisir entre Newton et Einstein. Mais un tel objet est étranger à la Mécanique proprement dite et ne pouvait être envisagé dans le présent Ouvrage.

Tout en développant comme il convenait la Mécanique théorique, je n'ai pas négligé la Mécanique appliquée et j'ai traité, soit dans le Cours, soit dans les Exercices, un grand nombre de problèmes, qui se présentent couramment en Physique ou dans l'Industrie. J'ai multiplié les exemples numériques, afin de familiariser le lecteur avec l'emploi des unités, auxquelles j'ai d'ailleurs consacré tout un Chapitre.

Comme dans les Tomes I et II, je me suis permis de déborder parfois le programme de Mathématiques spéciales. C'est ainsi que j'ai écrit un Chapitre élémentaire sur la Dynamique des systèmes, car j'eusse été navré que mon Livre ne permît pas au lecteur d'établir, par exemple, l'équation des oscillations d'un pendule composé ou d'un galvanomètre.

J. Haag.

Clermont-Ferrand, 1er juillet 1921.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

INTRODUCTION.

---

1. La Mécanique est la science qui a pour but l'étude des phénomènes de mouvement (et, comme cas particulier, de repos) ou phénomènes mécaniques. A ce titre, c'est donc une *science purement expérimentale*.

Effectivement, ses lois actuelles doivent leur existence aux observations les plus vulgaires, interprétées par les esprits géniaux des Galilée, des Képler, des Newton. Mais, à cause de leur simplicité et de leur grande généralité, elles ont perdu peu à peu leur caractère expérimental et ont fini par s'imposer comme des *axiomes* analogues à ceux de la Géométrie.

Ceci explique pourquoi la Mécanique rentre à la fois dans le domaine des Mathématiciens (sous le nom de *Mécanique rationnelle*) et dans celui des Physiciens (sous le nom de *Mécanique appliquée*, *Mécanique physique*, *Mécanique expérimentale*).

Dans les Chapitres qui vont suivre, nous nous placerons, en premier lieu, au point de vue du mathématicien. Nous donnerons des définitions et ferons des conventions purement abstraites, dont nous tirerons ensuite les conséquences logiques. Puis, nous montrerons comment ces considérations se rattachent à certains phénomènes expérimentaux, qu'elles permettent d'étudier pratiquement, avec une approximation plus ou moins grande.

On divise la Mécanique en trois parties :

La *Cinématique*, qui est l'étude purement descriptive des mouvements;

La *Dynamique*, qui est l'étude des conditions dans lesquelles se produisent les mouvements;

La *Statique*, qui est l'étude des conditions dans lesquelles il n'y a pas mouvement.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES DE CINÉMATIQUE.

2. Mouvement du point. — Soit un trièdre de coordonnées $Oxyz$, que nous appellerons le *trièdre de référence* ou encore le *trièdre fixe*. Soient maintenant un *point géométrique* $M(x, y, z)$ et une variable indépendante t, que nous appellerons le *temps*. Supposons que x, y, z soient des fonctions déterminées de t :

$$(1) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Nous dirons que lorsque t croît d'une manière continue (généralement à partir de zéro), *le point* M *est en mouvement* PAR RAPPORT AU TRIÈDRE $Oxyz$. Les formules (1) définissent ce mouvement; ce sont *les équations du mouvement*.

La courbe décrite par M, dont les équations (1) sont les équations paramétriques, porte le nom de *trajectoire*.

Telles sont les définitions mathématiques. Voyons maintenant quelles sont les *réalités expérimentales*, dont elles constituent l'abstraction.

3. D'abord, le point géométrique n'existe pas dans la Nature, mais seulement dans l'esprit des mathématiciens. En Mécanique appliquée, on le remplace par le *point matériel*, que l'on définit habituellement comme étant constitué par *une petite portion de matière*. Il n'y a pas lieu de discuter la valeur philosophique de cette définition, à laquelle on doit garder un caractère purement empirique. Le point matériel varie suivant les phénomènes envisagés : c'est un obus pour le Balisticien, une planète pour l'Astronome, une molécule pour le Physicien. En règle générale, ses dimensions sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt.

Si nous essayons maintenant de *situer* un point matériel dans

l'espace, nous constatons tout de suite que cela nous est impossible, si ce point est unique dans l'Univers ([1]). Nous sommes obligés de considérer, en même temps, d'autres points, formant une figure *indéformable* et dont l'ensemble constitue le *repère*, par rapport auquel nous pouvons maintenant situer notre premier point. Ce repère sera, par exemple, la Terre pour le Balisticien, la Terre ou le Soleil pour l'Astronome, l'éther pour le Physicien. C'est lui que nous schématisons par notre trièdre de référence.

A quoi correspond maintenant la variable t? Tout le monde possède, sans y avoir jamais réfléchi, *la notion intuitive du temps*. Si l'on cherche à l'approfondir et à justifier les conventions sur lesquelles repose sa mesure, on est immédiatement entraîné dans de longues et délicates considérations philosophiques, qui ont fait couler des flots d'encre, mais qui ne sauraient trouver leur place dans cet Ouvrage. Nous nous contenterons simplement de dire que, dans la pratique, *le temps se mesure avec des horloges*.

Une fois en possession des notions de point matériel, d'espace relatif et de temps, il nous est facile de passer à la notion de *mouvement relatif*. Le point matériel M est dit en mouvement *par rapport au repère* R si sa position par rapport à ce repère varie avec le temps. Il revient évidemment au même de dire que ses coordonnées, par rapport au trièdre de référence que nous attachons à R, changent avec le temps, sont des fonctions du temps. Nous retombons sur notre définition mathématique.

Toutes les fois que l'on parle de mouvement, il est absolument indispensable de préciser le repère auquel ce mouvement est rapporté. Sinon, on parle un langage incompréhensible ([2]). Dans tout problème de Mécanique, qu'il s'agisse de Mécanique rationnelle ou appliquée, *la première chose à faire est de choisir le trièdre de référence*.

4. Vitesse et accélération. — Reprenons le mouvement défini par les équations (1).

([1]) Dans cette fiction, nous ne devons pas oublier de faire abstraction de notre propre corps. C'est cet oubli, éminemment difficile à réaliser, qui fait que beaucoup de gens prétendent concevoir l'espace et le mouvement absolus. Ils se prennent eux-mêmes pour trièdre de référence.

([2]) Le mouvement *absolu* ne se conçoit pas davantage que l'espace absolu (*voir* la Note précédente). Tous les mouvements qui portent ce nom ne sont que des mouvements relatifs particuliers.

On appelle *vecteur vitesse* du point M au temps t la dérivé géométrique (t. II, n° 105) du vecteur $\overrightarrow{OM}$, ou, plus généralement, du vecteur $\overrightarrow{PM}$, P désignant un point quelconque fixe par rapport au trièdre de référence, c'est-à-dire de coordonnées constantes. Cette dérivée géométrique est indépendante du choix du point P, puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{OM}$ diffèrent par le vecteur constant $\overrightarrow{OP}$ et, par conséquent, ont la même dérivée.

Au point de vue expérimental, tout le monde possède la notion vulgaire de vitesse. On parle couramment d'une vitesse de tant de kilomètres à l'heure ou de tant de mètres par seconde. Mais, cette notion n'offre un caractère précis que dans le cas particulier d'un mouvement rectiligne et uniforme. Pour l'étendre au cas d'un mouvement curviligne quelconque, on définit d'abord le vecteur vitesse moyenne $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, au moyen d'un mouvement rectiligne et uniforme; puis, on passe à la limite, en faisant tendre Δt vers zéro. Cela conduit précisément à la dérivée géométrique envisagée ci-dessus. Nous n'insistons pas davantage sur ces considérations classiques élémentaires.

Les trois composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ du point M suivant les axes $Oxyz$ sont (t. II, n° 105)

$$(2) \qquad V_x = \frac{dx}{dt} = x', \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = y', \qquad V_z = \frac{dz}{dt} = z'.$$

Si l'on observe que les projections de M sur Ox ou Oxy ont pour abscisse x ou pour abscisse et ordonnée x et y et si l'on applique les formules (2) à ces projections, on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La projection du point* M *sur un axe fixe ou sur un plan fixe a pour vecteur vitesse la projection sur cet axe ou sur ce plan du vecteur vitesse de* M.

Si les axes sont rectangulaires, la longueur v du vecteur vitesse est évidemment donnée par la formule

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

5. On appelle *vecteur accélération* la dérivée géométrique du vecteur vitesse.

Au point de vue expérimental, cette notion est plus complexe que celle de la vitesse. Dans la pratique, on dit qu'un mouvement s'accélère quand sa vitesse augmente et l'on sent vaguement que c'est le taux de cet accroissement de vitesse qui doit servir de mesure à l'accélération. Or, ce qui permet d'évaluer le taux d'un accroissement, c'est précisément la dérivée. On est ainsi conduit à la définition ci-dessus. On prend la dérivée géométrique, parce qu'il faut être renseigné non seulement sur la variation de grandeur, mais aussi sur la variation de direction du vecteur vitesse.

Les composantes du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ sont les dérivées des composantes du vecteur vitesse, c'est-à-dire, d'après les formules (2),

$$(3) \qquad \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \qquad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \qquad \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = z''.$$

Elles donnent lieu à un théorème analogue à celui qui a été énoncé pour le vecteur vitesse.

Hodographe. — Menons par un point *fixe* quelconque, par exemple par le point O, un vecteur $\overrightarrow{Om}$ équipollent au vecteur vitesse du point M. La courbe décrite par m porte le nom d'*hodographe*. Si l'on considère le mouvement de m sur cet hodographe, son vecteur vitesse est la dérivée géométrique de Om, donc du vecteur vitesse de M. C'est, par conséquent, le vecteur accélération de M.

Les vecteurs vitesse et accélération d'un point mobile M peuvent être considérés comme des vecteurs libres (t. II, n° 99). Toutefois, on leur donne ordinairement le point M pour origine.

6. Propriétés et formules diverses. — Théorème. — *Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.*

Il est, en effet, la limite du vecteur $\frac{MM'}{\Delta t}$, qui est porté par la sécante MM', laquelle tend vers la tangente en M.

Vitesse algébrique. — Supposons que la trajectoire soit orientée dans un sens quelconque. Nous appellerons *vitesse algébrique* la

mesure algébrique v du vecteur vitesse sur la demi-tangente positive (t. II, n° 11). Si s est l'abscisse curviligne de M au temps t, on a

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{4}$$

Cela est vrai en valeur absolue, parce qu'on peut écrire

$$\left|\frac{\mathrm{MM'}}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{MM'}}{|\Delta s|}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|;$$

le premier facteur du second membre tend vers 1 (t. I, n° 172) et le second tend vers $|v|$. Cela est vrai en signe, parce que le vecteur vitesse est dirigé dans le sens des s croissants ou décroissants, suivant que la dérivée $\frac{ds}{dt}$ est positive ou négative.

On peut aussi remarquer que les formules (2) s'écrivent

$$V_x = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = va, \qquad V_y = vb, \qquad V_z = vc. \tag{5}$$

a, b, c désignant les cosinus directeurs de la demi-tangente positive (t. II, n° 193). Il suffit alors d'appliquer le théorème fondamental des projections (t. II, n° 19) pour obtenir à la fois le théorème ci-dessus et la formule (4).

On dit qu'un mouvement curviligne est *uniforme* lorsque sa vitesse algébrique est constante. En intégrant la formule (4), il revient au même de dire que s est une fonction linéaire du temps ou, d'une manière plus banale, que le chemin parcouru est proportionnel au temps.

7. *Vitesse aréolaire.* — Prenons le moment du vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathrm{MV}}$ par rapport à Oz (t. II, n° 109) :

$$\overline{\overrightarrow{\mathrm{MV}}, \overrightarrow{Oz}} = xy' - yx'. \tag{6}$$

Le second membre peut s'interpréter simplement, si l'on considère la projection P de M sur xOy et l'aire A balayée par le rayon vecteur OP. On a, en effet (t. I, n° 175),

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx);$$

donc

$$(7)\qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Cette dérivée porte le nom de *vitesse aréolaire* de P par rapport à O.

D'après (6), *le moment de* $\overrightarrow{MV}$ *par rapport à* Oz *est égal au double de la vitesse aréolaire de la projection de* M *sur* xOy *par rapport à* O.

Si ρ et θ sont les coordonnées polaires de P, la vitesse aréolaire de ce point est (t. I, n° 175)

$$(8)\qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Lorsque la vitesse aréolaire est constante, l'aire balayée par le rayon vecteur OP est proportionnelle au temps; on dit que le mouvement obéit à la *loi des aires* sur le plan des xy et par rapport à O.

8. Composantes principales ou intrinsèques de l'accélération. — Dérivons les formules (5) par rapport au temps. En utilisant la première formule de Frenet (t. II, n° 326), on peut écrire

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{a'}{R}v,$$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire et a', b', c' les cosinus directeurs de la normale principale. Dès lors, on a

$$(9)\qquad \gamma_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dv}{dt}a + \frac{v^2}{R}a', \qquad \gamma_y = \frac{dv}{dt}b + \frac{v^2}{R}b', \qquad \gamma_z = \frac{dv}{dt}c + \frac{v^2}{R}c'.$$

Ces formules nous montrent, en vertu du théorème des projections, que le vecteur accélération peut être considéré comme la somme géométrique de deux vecteurs, l'un porté par la tangente à la trajectoire et ayant pour mesure algébrique sur la demi-tangente positive

$$(10)\qquad \gamma_T = \frac{dv}{dt},$$

l'autre porté par la normale principale et ayant pour mesure algébrique

$$(11)\qquad \gamma_N = \frac{v^2}{R}.$$

Le premier de ces vecteurs porte le nom d'*accélération tangentielle;* le second s'appelle *accélération normale.*

Leur somme géométrique se trouve dans le plan TMN; donc :

Théorème. — *Le vecteur accélération se trouve dans le plan osculateur à la trajectoire.*

La formule (11) montre que γ_N a le signe de R; donc :

Théorème. — *Le vecteur accélération est dirigé du même côté que la trajectoire par rapport à tout plan tangent autre que le plan osculateur. Si la trajectoire est plane*, on peut dire, plus brièvement, que *le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de cette ligne.*

L'accélération normale est aussi appelée *accélération centripète*, pour rappeler qu'elle est dirigée vers le centre de courbure.

Les deux vecteurs γ_T et γ_N sont appelés *composantes principales* du vecteur accélération, parce que ce sont ses composantes suivant les axes du trièdre principal (t. II, n° 324), la composante suivant la binormale étant nulle. On les appelle aussi *composantes intrinsèques*, parce qu'elles sont entièrement déterminées par le mouvement; elles ne dépendent pas, comme γ_x, γ_y, γ_z, d'un choix arbitraire d'axes de coordonnées [1].

D'après la formule (10), l'accélération tangentielle mesure l'accroissement de la vitesse algébrique, c'est-à-dire de la *grandeur de la vitesse.* D'après la formule (11), l'accélération normale est proportionnelle à la courbure de la trajectoire; elle mesure donc la vitesse de rotation de la tangente à cette courbe ou, si l'on veut, les *changements d'orientation du vecteur vitesse.*

Théorème. — *Pour qu'un mouvement curviligne soit uniforme, il faut et il suffit que son vecteur accélération soit constamment normal à la trajectoire.*

Cela résulte manifestement de la formule (10).

---

(1) Cela ne veut pas dire qu'elles sont indépendantes du choix du trièdre de référence. Si l'on prend un deuxième trièdre de référence mobile par rapport au premier, le mouvement est changé, donc aussi les composantes intrinsèques. Celles-ci ne demeurent invariantes que si le deuxième trièdre est fixe, comme le premier.

Dans ce cas, il n'y a pas accélération, au sens vulgaire du mot, puisque la vitesse reste constante, mais seulement au sens géométrique : le vecteur accélération a pour unique effet de changer la direction de la vitesse et non sa grandeur.

9. Diagrammes. — Supposons connue la trajectoire et occupons-nous seulement de la manière dont elle est parcourue par le mobile ou, comme on dit, de la *loi du mouvement*. Cette loi est déterminée par la fonction

$$s = f(t), \tag{12}$$

qui définit ce qu'on appelle quelquefois la *loi des espaces*.

Pour obtenir une vue d'ensemble du mouvement, il est souvent commode de construire la courbe (12), en portant les temps en abscisses et les espaces en ordonnées. On obtient ainsi le *diagramme des espaces*.

Cette représentation graphique est à peu près indispensable, toutes les fois qu'on a affaire à un *mouvement étudié expérimentalement* et pour lequel la fonction $f(t)$ n'a, par conséquent, aucune existence analytique.

Toutes les fois que cela est possible, on essaie d'obtenir directement ce diagramme, en *enregistrant le mouvement*, par un dispositif plus ou moins analogue à celui de l'appareil bien connu du général Morin. Sinon, on mesure, à des intervalles réguliers, l'espace parcouru et l'on en déduit autant de points du diagramme. On trace ensuite une ligne régulière [1] passant aussi près que possible de tous ces points.

Dans les graphiques des chemins de fer, on joint les points qui représentent les stations par des segments de droites, ce qui revient à admettre qu'entre deux stations consécutives, le mouvement du

---

[1] Nous entendons par là qu'il ne faut pas s'astreindre à passer rigoureusement par tous les points, ce qui donnerait lieu, pour peu que les points soient rapprochés, à des sinuosités invraisemblables, par suite des erreurs expérimentales inévitables. On s'arrange pour laisser à peu près autant de points d'un côté de la courbe que de l'autre. Si un point est très éloigné, on admet qu'il est faux et l'on n'en tient pas compte ; il y aurait lieu de recommencer la mesure correspondante, qui a dû être entachée d'une erreur grossière. Mais, bien entendu, il faut être très prudent dans de semblables interprétations.

train est uniforme. Cela est évidemment faux; mais on ne se préoccupe pas d'avoir une représentation exacte du mouvement, ce qui serait d'ailleurs impossible, car ce mouvement peut dépendre de toutes sortes de circonstances accidentelles variables d'un jour à l'autre.

Quand on possède le diagramme des espaces, *on peut mesurer la vitesse* en chaque point, car, d'après la formule (4), c'est tout simplement *la pente du diagramme*. Quand on évalue cette pente, il faut bien prendre garde aux échelles adoptées sur l'axe des temps et sur l'axe des espaces. Si l'on veut par exemple la vitesse en mètres par seconde, on se déplace sur la tangente, jusqu'à ce que l'abscisse se soit augmentée d'un nombre rond n de secondes, mesurées sur l'échelle des temps. On compte le nombre N de mètres parcourus, sur l'échelle des espaces. La vitesse cherchée est $\frac{N}{n}$.

A la simple inspection du diagramme des espaces, on reconnaît immédiatement les phases où le mouvement est accéléré et celles où le mouvement est retardé. Les premières correspondent, en effet, aux régions du diagramme où la concavité est tournée vers le haut (l'axe des espaces étant supposé orienté vers le haut), puisque la pente est croissante, tandis que les secondes correspondent aux régions concaves vers le bas. En un point d'inflexion, la vitesse passe par un maximum ou par un minimum.

Si l'on veut être renseigné avec plus de précision sur les variations de la vitesse, on construit sa courbe représentative ou *diagramme des vitesses*.

On y est d'ailleurs conduit directement dans toute étude expérimentale où l'on détermine un mouvement par des mesures de la vitesse. On procède, pour la construction du diagramme, comme il a été expliqué plus haut, soit par enregistrement direct, soit par des mesures échelonnées.

Le diagramme des vitesses peut évidemment être déduit du diagramme des espaces, par des mesures de pentes.

Inversement, connaissant le diagramme des vitesses, on peut *remonter au diagramme des espaces*. On a, en effet,

$$s = \int_0^t v \, dt. \tag{13}$$

On aura donc autant de points qu'on voudra du diagramme des

espaces, en mesurant (par la méthode des trapèzes, par exemple) l'aire comprise entre le diagramme des vitesses, les axes Ot et Ov et une ordonnée quelconque.

Dans cette mesure, il faut encore faire très attention aux unités. Si la vitesse est évaluée en mètres par seconde, par exemple, le nombre qui mesure l'aire d'un trapèze est obtenu en multipliant sa hauteur, évaluée en secondes, par la demi-somme de ses bases, évaluées en mètres par seconde. Ce nombre représente un espace parcouru évalué en mètres.

La pente du diagramme des vitesses donne l'accélération tangentielle, en vertu de la formule (10).

On peut enfin considérer un *diagramme des accélérations tangentielles*, qui permettrait de remonter, par une quadrature, au diagramme des vitesses, à condition de connaître la vitesse initiale. Mais, ce diagramme est beaucoup moins usité que les précédents.

10. Étude d'un mouvement en coordonnées curvilignes. — Il est quelquefois commode, pour l'étude d'un mouvement, d'employer des coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes, par exemple des coordonnées polaires ou semi-polaires. Soit, d'une manière générale, un système quelconque de coordonnées p, q, r lié au trièdre de référence par les formules

$$(14)\qquad x = f(p, q, r), \qquad y = g(p, q, r), \qquad z = h(p, q, r).$$

Les composantes du vecteur vitesse suivant $Oxyz$ sont données par

$$(15)\qquad v_x = f'_p p' + f'_q q' + f'_r r'$$

et par les deux formules analogues. On peut en conclure que ce vecteur est la somme géométrique de trois vecteurs ayant pour composantes respectives les premiers termes, les seconds termes et les troisièmes termes des trois formules telles que (15). Le premier de ces trois vecteurs est proportionnel à p'; il est, en outre, porté par la tangente à la courbe le long de laquelle p varie seul.

En dérivant une seconde fois, on pourrait chercher les composantes suivant les mêmes directions du vecteur accélération. Mais, cela donne généralement des calculs beaucoup plus compliqués.

Appliquons ces considérations au cas des *coordonnées semi-polaires*. La composante suivant Oz n'est pas changée. Occupons-nous donc seulement des composantes du plan des xy. Les formules (14) sont, dans ce cas,

$$(16)\qquad x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Dérivons-les par rapport à t :

(17) $$x' = \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta, \qquad y' = \rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta.$$

On en déduit, comme il a été expliqué plus haut, que *le vecteur vitesse a pour composante* ρ' *suivant l'axe* OX, *d'angle polaire* θ *et* $\rho\theta'$ *suivant l'axe* OY, *d'angle polaire* $\theta + \frac{\pi}{2}$ ([1]).

Ces deux composantes étant rectangulaires, on en déduit

(18) $$v^2 = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2,$$

formule qui peut aussi se déduire, en divisant par $(dt)^2$, de la formule (6) du n° 173 du Tome I.

Dérivons une nouvelle fois les formules (17) :

$$x'' = (\rho'' - \rho\theta'^2)\cos\theta - (\rho\theta'' + 2\rho'\theta')\sin\theta,$$
$$y'' = (\rho'' - \rho\theta'^2)\sin\theta + (\rho\theta'' + 2\rho'\theta')\cos\theta.$$

On en conclut que les composantes du vecteur accélération suivant OX et OY sont

(19) $$\rho'' - \rho\theta'^2 \qquad \text{et} \qquad \rho\theta'' + 2\rho'\theta'.$$

La seconde s'écrit aussi

(20) $$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\theta') = \frac{2}{\rho}\frac{d^2A}{dt^2}.$$

On en conclut que *lorsque le vecteur accélération passe constamment par le point fixe* O ([2]), *le mouvement obéit à la loi des aires par rapport à ce point.*

Prenons maintenant les *coordonnées polaires dans l'espace* (t. II, n° 40). Les formules de passage sont

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Dérivons-les :

$$x' = r'\sin\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\,\varphi' + r\cos\theta\cos\varphi\,\theta',$$
$$y' = r'\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\,\varphi' - r\cos\theta\sin\varphi\,\theta',$$
$$z' = r'\cos\theta \qquad\qquad\qquad\qquad - r\sin\theta\,\theta'.$$

Si l'on introduit les axes OX, OY, OZ, qui ont pour angles polaires respec-

---

([1]) On arriverait au même résultat, en projetant directement le vecteur vitesse et se servant des formules (1) du n° 252 du Tome II.

([2]) Ou, plus généralement, rencontre Oz.

tifs (θ, φ), $\left(\theta, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\theta + \frac{\pi}{2}, \varphi\right)$, les composantes du vecteur vitesse suivant ces axes sont

$$r', \quad r\varphi' \sin\theta, \quad r\theta'. \tag{21}$$

Nous ne calculerons pas les composantes du vecteur accélération, qui sont trop compliquées.

11. Mouvement d'un corps solide. — Reprenons notre trièdre de référence $Oxyz$. On peut imaginer simultanément plusieurs points mobiles par rapport à ce trièdre. On peut même en imaginer une infinité, formant un milieu continu à une, deux ou trois dimensions. Nous ne considérerons que le cas particulier où tous ces points restent à des distances invariables les uns des autres ou, comme on dit, constituent un *système indéformable* ou *corps solide*.

A ce système, nous attacherons un trièdre $O'x'y'z'$, qui lui sera invariablement lié et dont il suffira de connaître la position pour connaître celle du corps solide. Cette position peut être définie par les coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point O' et par les neuf cosinus directeurs de $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, lesquels peuvent être remplacés par les trois angles d'Euler (t. II, n° 36). Si ces quantités sont des fonctions connues du temps, elles définissent le mouvement du trièdre $O'x'y'z'$ ou, ce qui revient au même, du corps solide qui lui est attaché, par rapport au trièdre de référence $Oxyz$.

Comme le nombre des paramètres indépendants dont dépend le trièdre mobile est égal à six (les trois coordonnées de O' et les trois angles d'Euler), on voit que le mouvement le plus général d'un corps solide dépend de six fonctions du temps.

Quand ce mouvement est donné, on peut connaître le mouvement de n'importe quel point M entraîné par le corps solide. Pour préciser de quel point il s'agit, on se donnera, par exemple, ses trois coordonnées (x', y', z') par rapport à $O'x'y'z'$. Les formules du changement de coordonnées feront ensuite connaître ses coordonnées (x, y, z) par rapport à $Oxyz$, en fonction du temps. Autrement dit, elles donneront les équations du mouvement.

Au point de vue expérimental, le corps solide n'existe pas, car tous les corps se déforment plus ou moins sous l'action des différents agents physiques qui peuvent s'exercer sur eux. Mais on peut en avoir des approximations, telles qu'un organe de machine, un projec-

tile d'artillerie, la Terre, etc. En les assimilant à des solides mathématiques, on peut étudier leurs mouvements avec une approximation qui reste suffisante, tant que les erreurs que l'on peut se permettre sont très supérieures aux déformations réelles subies par le corps (¹).

12. Composition des mouvements. — Dans toute question de Mécanique, on peut choisir comme on veut le trièdre de référence. Lorsque celui-ci est imposé à l'avance, on a toujours le droit, si l'on espère en recueillir des simplifications, de prendre un trièdre de référence auxiliaire, de même qu'en Géométrie analytique il est souvent avantageux de faire des changements de coordonnées. Étudions donc ce qui se passe quand on rapporte successivement le mouvement d'un même point M à deux trièdres de référence différents T et T'.

Débarrassons-nous d'abord du *cas où les trièdres sont fixes l'un par rapport à l'autre*. La seule différence entre les deux mouvements consiste dans la position de la trajectoire par rapport au trièdre de référence. A chaque instant t, les deux trajectoires se superposent dans toute la partie parcourue antérieurement par le mobile. Mais, la configuration qu'elles forment chacune avec leur trièdre de référence respectif n'est pas la même. Si, par la pensée, on amène T' à coïncider avec T, en entraînant sa trajectoire, on obtient une courbe C' qui ne coïncide plus avec la trajectoire C relative à T, mais qui est une courbe égale, puisqu'on peut l'amener de nouveau à coïncider avec C par le déplacement qui ramènerait T' dans sa position primitive.

La loi du mouvement sur la trajectoire est la même pour les deux trièdres, puisque, entre deux instants quelconques, le même arc est parcouru par le mobile, quel que soit le trièdre de référence considéré. Par suite, à chaque instant, les deux vecteurs vitesse coïncident; mais ils n'ont pas la même position par rapport aux deux trièdres. On peut en dire autant des deux vecteurs accélération.

En résumé, on peut dire qu'au point de vue cinématique les deux mouvements sont identiques. Le changement de trièdre de référence est, au fond, un vulgaire changement de coordonnées, comme on en fait en Géométrie analytique.

(¹) Il n'en est plus ainsi lorsqu'on doit tenir compte des déplacements qui sont du même ordre de grandeur que les déformations, comme dans la théorie de l'élasticité ou des mouvements vibratoires.

13. Arrivons maintenant au véritable changement de repère, c'est-à-dire au cas où *les deux trièdres sont mobiles l'un par rapport à l'autre.*

Nous conviendrons d'appeler *mouvement absolu* le mouvement de M par rapport à T, *mouvement relatif* le mouvement de M par rapport à T' et *mouvement d'entraînement* le mouvement de T' par rapport à T. Cette terminologie est purement conventionnelle et l'on pourrait très bien, en particulier, intervertir les rôles des deux trièdres.

Nous dirons encore que le mouvement absolu est la *résultante* ou la *composition* du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement. Nous écrirons symboliquement

$$(22) \qquad (M, T) = (M, T') + (T', T).$$

Plus généralement, on peut imaginer une *chaîne de trièdres* T, T_1, T_2, ..., T_{n-1}, T_n, dont chacun est animé d'un mouvement connu par rapport au précédent. Si l'on connaît le mouvement de M par rapport à T_n, on peut évidemment connaître le mouvement de M par rapport à chacun des trièdres précédents et, en particulier, par rapport au premier T. Nous dirons encore que le mouvement par rapport à T est la résultante ou la composition du mouvement par rapport à T_n et de chacun des mouvements d'entraînement intermédiaires; ce que nous écrirons symboliquement

$$(23) \qquad (M, T) = (M, T_n) + (T_n, T_{n-1}) + \ldots + (T_2, T_1) + (T_1, T).$$

Inversement, étant donné le mouvement de M par rapport à T, on peut le *décomposer* en plusieurs autres, par l'introduction d'un ou plusieurs trièdres intermédiaires, constituant avec T une chaîne analogue à la précédente. On fait, en général, une telle décomposition dans le but de remplacer un mouvement compliqué par une somme (symbolique) de mouvements simples. C'est ainsi que les mouvements des planètes par rapport à la Terre, qui sont des mouvements très compliqués, peuvent être considérés comme résultant de leurs mouvements par rapport au Soleil et du mouvement du Soleil par rapport à la Terre, lesquels sont tous très simples.

14. Ces définitions étant posées, revenons au cas de deux trièdres T et T'.

Le point M décrit une *trajectoire absolue* C par rapport à T et une *trajectoire relative* C′ par rapport à T′. Ces trajectoires ne coïncident plus, comme au n° 12 et en voici la raison. Considérons les points P et Q, respectivement solidaires de T′ et de T, qui coïncident au temps t avec M. (Nous les appellerons les *points coïncidants* de T′ et de T au temps t.) Dans le cas du n° 12, ils continuaient, par la suite, à être confondus, ce qui entraînait la coïncidence des trajectoires. Dans le cas actuel, au contraire, ils se séparent immédiatement après le temps t, de sorte qu'à chaque instant les deux trajectoires n'ont en commun que la position actuelle du mobile. Ce sont deux courbes qui, non seulement ne coïncident pas, mais qui ont généralement des formes différentes et ne sont pas superposables.

13. Composition des vitesses. — Nous appellerons *vitesse absolue* la vitesse de M par rapport à T, *vitesse relative* la vitesse de M par rapport à T′ et *vitesse d'entraînement* la vitesse du point coïncidant P de T′ par rapport à S. Nous allons chercher quelle relation existe entre ces trois vecteurs, et c'est en cela que consiste le problème de la *composition des vitesses*. En Mathématiques élémentaires, on enseigne une solution géométrique intuitive, que nous supposerons connue du lecteur. Nous nous contenterons de donner la solution analytique suivante.

Soient (x, y, z) les *coordonnées absolues* (c'est-à-dire par rapport à T) de M au temps t et (x', y', z') ses *coordonnées relatives* (c'est-à-dire par rapport à T′) au même instant. Les premières définissent le mouvement absolu et les secondes le mouvement relatif. On passe des unes aux autres par les formules bien connues du changement de coordonnées, dont les coefficients sont des fonctions du temps entièrement déterminées par la connaissance du mouvement d'entraînement. Dans le cas particulier où ce mouvement n'existe pas, c'est-à-dire lorsque T′ est fixe par rapport à T, ces coefficients sont constants.

Il nous est inutile d'écrire explicitement ces formules, qui donnent x, y, z en fonction de x', y', z'; écrivons simplement sous la forme symbolique

$$(24)\quad x = f(x', y', z', t), \qquad y = g(x', y', z', t), \qquad z = h(x', y', z', t).$$

Considérons maintenant x', y', z' comme des fonctions du temps

et dérivons totalement par rapport à t; nous avons (t. I, nº 130)

$$(25)\qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{dz'}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

et les deux formules analogues.

Les premiers membres sont les composantes de la vitesse absolue suivant les axes $Oxyz$. Essayons maintenant de retrouver, dans les seconds membres, les composantes des vitesses relative et d'entraînement. Pour retrouver la vitesse relative, il nous suffit de supposer que T' est fixe par rapport à T, puisque la vitesse absolue se réduit alors à la vitesse relative, de sorte que les composantes de cette dernière sont ce que deviennent les seconds membres de (25) dans l'hypothèse envisagée. Or, les coefficients des formules (24) sont maintenant constants, de sorte que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$ sont nulles. Les autres dérivées restent, d'autre part, les mêmes, que les coefficients dépendent ou non du temps. Il suit de là que les composantes de la vitesse relative (suivant les axes $Oxyz$, bien entendu) sont les parenthèses des formules (25) et analogues.

Pour mettre en évidence la vitesse d'entraînement, nous supposons maintenant que M est immobile par rapport à T' : autrement dit, nous lui substituons son point coïncidant P. La vitesse absolue se réduit à la vitesse d'entraînement, de sorte que les composantes de cette dernière sont ce que deviennent les seconds membres de (25). Or, les coordonnées relatives x', y', z' sont actuellement constantes; leurs dérivées sont nulles et le second membre de (25) se réduit à son dernier terme.

En définitive, les seconds membres des formules (25) et analogues se décomposent en deux groupes, constitués respectivement par les composantes de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. D'après le théorème des projections, nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *La vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

Cette proposition peut s'étendre sans difficulté au cas d'une chaîne quelconque de trièdres (nº 13). En l'appliquant au point coïncidant de chaque trièdre par rapport aux deux trièdres précédents et additionnant toutes les égalités géométriques ainsi obtenues, on aboutit

à cette conclusion que *la vitesse résultante est la somme géométrique des vitesses composantes.*

16. Composition des accélérations. — Les accélérations absolue, relative et d'entraînement se définissent comme les vitesses correspondantes.

Proposons-nous encore de voir s'il existe une relation entre ces trois vecteurs. A cet effet, dérivons (25); nous obtenons une formule que nous mettons sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A + A' + A'', \tag{26}$$

en posant

$$A = S\,\frac{\partial f}{\partial x'}\,\frac{d^2x'}{dt^2}, \tag{27}$$

$$A' = 2\,S\,\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial t}\,\frac{dx'}{dt}, \tag{28}$$

$$A'' = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{29}$$

Si l'on raisonne comme au numéro précédent, on constate que A, B, C sont les composantes de l'accélération relative [1] et que A'', B'', C'' sont les composantes de l'accélération d'entraînement. Mais, il reste les termes A', B', C', qui s'évanouissent dans chacune des deux hypothèses envisagées successivement. On conclut de là que l'accélération absolue n'est pas égale à la somme géométrique des accélérations relative et d'entraînement; il faut compléter cette somme par un troisième vecteur, qui porte le nom d'*accélération complémentaire* ou *de Coriolis* et dont nous ne pouvons donner ici l'interprétation cinématique.

Il y a toutefois un cas [2] où les accélérations se composent comme les vitesses; c'est celui où le mouvement d'entraînement est une translation (n° 34). On peut alors prendre les deux trièdres parallèles et, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées absolues de l'origine de T', les formules (24) se réduisent à

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z'. \tag{30}$$

En les dérivant une ou deux fois, on obtient la composition des vitesses ou la composition des accélérations.

---

(1) Les expressions de A, B, C seraient plus compliquées que ne l'indique (27) si les fonctions f, g, h étaient des fonctions quelconques de x', y', z'. Mais, il ne faut pas oublier que ce sont des fonctions linéaires. Cette simplification est d'ailleurs sans importance au point de vue de notre raisonnement.

(2) On démontre qu'il n'y en a pas d'autre.

CHAPITRE II.

MOUVEMENTS PONCTUELS REMARQUABLES.

Nous allons étudier, dans ce Chapitre, quelques mouvements particuliers du point, qui se rencontrent fréquemment en Mécanique appliquée.

17. Mouvement rectiligne et uniforme. — Cherchons le mouvement le plus général, dont *le vecteur vitesse soit constant, en grandeur et en direction*. Soient (a, b, c) ses composantes. Ce sont (n° 4) les dérivées de x, y, z par rapport au temps. En intégrant, nous en déduisons

$$(1) \qquad x = at + a', \qquad y = bt + b', \qquad z = ct + c',$$

a', b', c' désignant trois constantes. Telles sont les équations du mouvement demandé.

La trajectoire est une droite (t. II, n° 95), de paramètres directeurs a, b, c et passant par le point (a', b', c'), qui est la position initiale du mobile, c'est-à-dire sa position au temps zéro.

Le chemin parcouru entre le temps o et le temps t est

$$(2) \qquad s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, t = vt;$$

il est proportionnel au temps.

Le vecteur accélération a ses trois composantes nulles et *réciproquement*, si ce vecteur est nul, les trois composantes du vecteur vitesse sont constantes, le mouvement est rectiligne et uniforme.

18. Mouvement uniformément varié. — Cherchons maintenant le mouvement le plus général, dont *le vecteur accélération soit constant en grandeur et en direction*. Soient $(2a, 2b, 2c)$ ses com-

posantes. Par intégration, on en déduit les composantes du vecteur vitesse :

$$(3)\qquad x' = 2at + a', \qquad y' = 2bt + b', \qquad z' = 2ct + c',$$

a', b', c' désignant trois constantes, qui sont les composantes du vecteur vitesse initiale. Sur ces équations, on reconnaît que *l'hodographe est une droite, parcourue d'un mouvement uniforme;* ce qu'on aurait pu prévoir, en vertu du numéro précédent et en se souvenant que le vecteur accélération est le vecteur vitesse de l'hodographe.

Intégrons maintenant les équations (3) :

$$(4)\qquad x = at^2 + a't + a'', \qquad y = bt^2 + b't + b'', \qquad z = ct^2 + c't + c'',$$

a'', b'', c'' désignant trois nouvelles constantes, qui sont les coordonnées de la position initiale du mobile.

Sur ces équations, on reconnaît que *la trajectoire est une parabole*, dont l'axe a pour paramètres directeurs (a, b, c) et, par conséquent, est parallèle au vecteur accélération.

L'équation de son plan s'obtient en éliminant t^2 et t entre les trois équations (4)

$$(5)\qquad \| x - a'' \quad a \quad a' \| = 0.$$

Le *passage au sommet* a lieu lorsque la vitesse est perpendiculaire à l'axe, donc au vecteur accélération, ce qui donne la condition

$$(6)\qquad a(2at + a') + b(2bt + b') + c(2ct + c') = 0.$$

De cette équation du premier degré, on tire t; en portant dans (4) on aurait les coordonnées du sommet.

On peut remarquer que le premier membre de (6) est le quart de la dérivée de $x'^2 + y'^2 + z'^2$, c'est-à-dire de v^2 par rapport à t. Donc, *le sommet de la parabole est le point où la vitesse est minimum.*

19. Équations canoniques du mouvement. — On peut simplifier considérablement les équations (4), par un choix convenable des axes de coordonnées et de l'origine des temps. Nous prenons d'abord le plan de la trajectoire comme plan des xy, ce qui annule les constantes c, c', c''. Prenons ensuite Oy parallèle au vecteur accélération : cela nous donne

$$a = 0, \qquad b = \frac{1}{2}\gamma.$$

Prenons enfin pour origine des coordonnées le sommet et pour origine des temps l'instant où le mobile passe en ce point, les axes étant, bien entendu, rectangulaires. Nous avons les conditions

$$b' = a'' = b'' = 0.$$

Finalement, les équations (4) se réduisent, en posant $a' = u$, à

(7) $$x = ut, \qquad y = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Telles sont les *équations canoniques* du mouvement uniformément varié.

La première montre que la projection de la vitesse sur la tangente au sommet de la parabole est constante et égale à u; cela résulte d'ailleurs de ce que cette tangente est perpendiculaire au vecteur accélération.

En éliminant t entre les équations (7), on obtient l'équation de la trajectoire

(8) $$x^2 = 2\frac{u^2}{\gamma}y.$$

Elle nous montre que le paramètre de la parabole est $\frac{u^2}{\gamma}$.

20. Cas du mouvement rectiligne. — Pour que la parabole (8) soit une droite, il faut et il suffit que $u = 0$, c'est-à-dire que la vitesse à un instant quelconque soit parallèle à l'accélération. Si l'on revient aux équations générales (4), ceci se traduit par les conditions

(9) $$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

qui seraient, du reste, faciles à établir directement.

D'après la seconde équation (7), la vitesse

(10) $$v = \gamma t$$

est proportionnelle au temps, si l'on choisit pour origine l'instant où la vitesse est nulle. Quant à l'espace parcouru depuis le même instant, il est proportionnel au carré du temps.

Le mouvement est dit *accéléré* lorsque la vitesse croît en valeur absolue et *retardé* dans le cas contraire. Il est facile de vérifier que

l'on se trouve dans la première ou dans la seconde circonstance, suivant que v et γ sont de même signe ou de signes contraires.

Si l'on élimine t entre (7) et (10), on obtient la relation

$$(11) \qquad v^2 = 2\gamma y = 2\gamma s,$$

qui caractérise, parmi tous les mouvements rectilignes, le mouvement uniformément varié (*cf.* Exercice proposé n° 8).

21. Mouvement vibratoire simple. — On appelle *mouvement vibratoire simple*, ou *harmonique*, ou *sinusoïdal*, ou *pendulaire* un mouvement rectiligne représenté par l'équation

$$(12) \qquad x = R \sin \omega t,$$

où R et ω désignent deux constantes.

L'origine O s'appelle le *centre du mouvement;* l'abscisse x s'appelle l'*élongation;* la constante R s'appelle l'*amplitude des élongations* ou simplement l'*amplitude;* l'angle ωt s'appelle la *phase*.

Le mouvement est périodique. Si T désigne sa période, on doit avoir

$$\sin[\omega(t + T)] = \sin \omega t,$$

quel que soit t. Ceci exige que ωT soit un multiple de 2π. La plus petite valeur satisfaisant à cette condition est

$$(13) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Telle est la valeur de la *période*.

On appelle *vibration* le mouvement du mobile pendant une période. Le mouvement indéfini se compose évidemment d'une succession de vibrations identiques.

On appelle *fréquence* le nombre de vibrations qui se produisent pendant l'unité de temps (laquelle est ordinairement la seconde). Comme la durée d'une vibration est T, la fréquence

$$(14) \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi};$$

c'est l'*inverse de la période*.

Si l'on calcule ω en fonction de T ou de f, l'équation (12) prend

l'une des deux formes

$$x = R\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \tag{15}$$

$$x = R\sin(2\pi f t). \tag{16}$$

La vitesse et l'accélération sont données par les formules

$$v = \quad R\omega\cos\omega t, \tag{17}$$

$$\gamma = -R\omega^2\sin\omega t. \tag{18}$$

Signalons les deux relations évidentes

$$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = R^2, \tag{19}$$

$$\gamma = -\omega^2 x. \tag{20}$$

22. Étude d'une vibration. — Cette étude résulte immédiatement des variations bien connues des fonctions circulaires. Si nous étudions, par exemple, le mouvement pendant la période (o, T), nous avons le tableau suivant :

t	o		$\frac{T}{4}$		$\frac{T}{2}$		$\frac{3T}{4}$		T
x	o	↗	R	↘	o	↘	— R	↗	o
v	$R\omega$	↘	o	↘	— $R\omega$	↗	o	↗	$R\omega$

On voit que le mobile oscille entre deux positions extrêmes, dont la distance commune au centre de vibration est égale à l'amplitude R. La vitesse oscille également entre deux valeurs opposées $R\omega$ et — $R\omega$, qui sont atteintes lorsque le mobile passe au centre. La valeur absolue $R\omega$ de cette vitesse maximum est appelée *amplitude de vitesse*.

23. Décalage d'un mouvement vibratoire simple. — Décaler un mouvement vibratoire simple, c'est *augmenter sa phase d'un angle constant* θ, appelé *angle de décalage*. Si l'on décale de θ le mouvement (12), son équation devient

$$x = R\sin(\omega t + \theta). \tag{21}$$

On voit que cela revient à un *changement d'origine des temps*, la nouvelle origine étant l'instant où la phase est égale à θ. Le décalage *ne change* donc *pas la nature du mouvement;* il ne fait que l'avancer ou le retarder, l'avance algébrique étant égale à $\frac{\theta}{\omega}$.

On peut assujettir l'angle de décalage à être compris entre 0 et 2π ou bien entre $-\pi$ et $+\pi$, car si l'on augmente θ de 2π, la formule (21) montre que l'on retombe sur le même mouvement. Autrement dit, l'avance peut toujours être évaluée en fraction de période, cette fraction pouvant être rendue inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, si l'on admet les avances négatives, c'est-à-dire les retards.

Représentation de Fresnel. — Les mouvements ayant une période donnée diffèrent les uns des autres par leur amplitude R et par leur phase initiale ou angle de décalage θ. Dans les applications, *on représente chacun d'eux par un vecteur de longueur* R *et d'angle polaire* θ, par rapport à un axe polaire quelconque OX. Si, à cet axe polaire, on adjoint l'axe perpendiculaire OY (t. II, n° 40), les composantes de ce vecteur représentatif suivant OX et OY sont

$$a = R\cos\theta, \qquad b = R\sin\theta. \tag{22}$$

Si l'on développe le sinus de l'équation (21), elle s'écrit

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t. \tag{23}$$

Ceci nous montre que toute équation de la forme (23) représente un mouvement vibratoire simple, dont le vecteur représentatif a pour composantes a et b. Son amplitude et sa phase initiale sont données par les formules (22), qu'il faudrait résoudre comme il a été indiqué au n° 40 du Tome II.

24. Composition de plusieurs mouvements vibratoires simples de même centre, de même direction et de même période. — Considérons les n mouvements définis par les équations

$$x_i = a_i\sin\omega t + b_i\cos\omega t \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{24}$$

Par définition, on appelle *mouvement résultant* [1] le mouvement obtenu en faisant la *somme algébrique des élongations :*

$$x = \Sigma x_i = (\Sigma a_i)\sin\omega t + (\Sigma b_i)\cos\omega t. \tag{25}$$

---

[1] On peut l'interpréter au sens ordinaire de la composition des mouvements, en imaginant que le centre de chaque vibration soit animé, par rapport au centre de la vibration précédente, du mouvement qui est précisément défini par cette dernière.

D'après ce qui a été vu au numéro précédent, ce mouvement résultant est aussi un mouvement vibratoire simple, de même centre, de même direction et de même période que les proposés. En vertu du théorème des projections et de la formule (25), on peut énoncer le théorème suivant, ordinairement connu sous le nom de *règle de Fresnel :*

Théorème. — *Le vecteur représentatif du mouvement résultant est la somme géométrique des vecteurs représentatifs des mouvements composants.*

Dans le cas particulier où cette somme géométrique est nulle, le mouvement résultant est le repos; les mouvements proposés se détruisent; on dit qu'ils *interfèrent* ou qu'il y a *interférence*. Ceci arrive, par exemple, quand on compose deux mouvements de même amplitude et décalés de π, c'est-à-dire en avance, l'un par rapport à l'autre, d'une demi-période.

25. Composition de deux mouvements de périodes très voisines; battements. — Imaginons que l'on compose le mouvement (12) avec le mouvement

$$x' = R' \sin \omega' t, \tag{26}$$

ω' étant très voisin de ω, c'est-à-dire que, si l'on pose

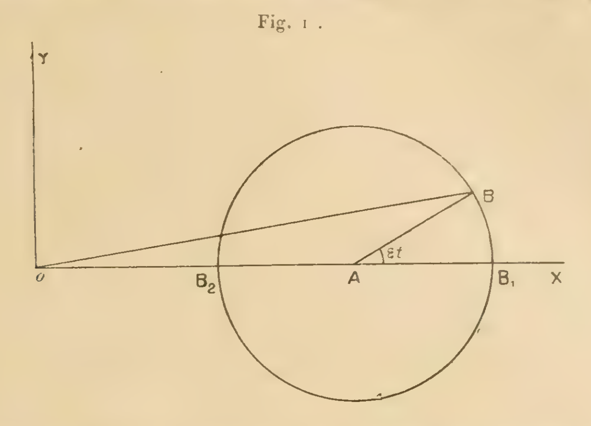
$$\omega' = \omega + \varepsilon, \tag{27}$$

le rapport $\frac{\varepsilon}{\omega}$ est supposé très petit.

Le mouvement résultant n'est évidemment pas un mouvement vibratoire simple. Mais, occupons-nous seulement de ce qui se passe pendant une période T du premier mouvement, d'une façon plus précise, entre les époques t et $t + T$. La différence de phase entre les deux mouvements varie de εt à $\varepsilon(t + T)$. Son accroissement $\varepsilon T = 2\pi \frac{\varepsilon}{\omega}$ est très petit et peut être négligé. Dès lors, *pendant la durée d'une vibration*, on peut considérer les deux mouvements comme ayant même période, mais ayant une différence de phase égale à εt. On est alors ramené au problème étudié au numéro précédent. Le mouvement résultant est approximativement un mouvement de même période que les proposés et dont le vecteur représentatif est donné

par la règle de Fresnel. Si l'on porte le vecteur $\overline{OA} = R$ sur OX, puis, à partir de A, le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de longueur R' et d'angle polaire εt,

Fig. 1.



le mouvement vibratoire résultant est, à l'instant t, représenté par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Le lieu du point B est un cercle de centre A et de rayon R'. Il permet de suivre aisément la variation des éléments de la vibration résultante et, en particulier, de son amplitude, qui est représentée par la distance OB. Cette amplitude est maximum, lorsque B est en B_1, c'est-à-dire lorsque εt est un multiple de 2π. Ce maximum est $R + R'$, c'est-à-dire la somme des amplitudes des mouvements proposés. L'amplitude minimum est atteinte lorsque B est en B_2, c'est-à-dire lorsque εt est un multiple impair de π; elle est égale à la différence des amplitudes des vibrations données. En particulier, si ces dernières sont égales, les minima sont nuls; il y a interférence à chaque passage de B en B_2.

La variation de l'amplitude OB est périodique ([1]), la période étant la durée d'une révolution complète de B, soit $\frac{2\pi}{\varepsilon}$. La fréquence F de cette variation est

(28) $$F = \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = f' - f,$$

en appelant f et f' les fréquences des mouvements proposés.

([1]) On le voit aussi sur la formule qui donne l'amplitude résultante

$$R''^2 = R^2 + R'^2 + 2RR' \cos \varepsilon t.$$

Ce phénomène de variation périodique de l'amplitude porte le nom de *phénomène des battements*. D'après la formule (28), on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *La fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des vibrations composantes.*

Les battements sont d'autant plus espacés que ces dernières sont plus voisines. Il peut arriver, par exemple, qu'on puisse les compter facilement et, par conséquent, mesurer F. Si l'on connaît l'une des fréquences f et f', on pourra en déduire l'autre.

26. COMPOSITION DE MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE FRÉQUENCES MULTIPLES. — Soit un nombre quelconque, fini ou infini, de mouvements vibratoires de la forme

$$x_n = a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t, \tag{29}$$

n étant un entier positif, que nous appellerons le *rang* du mouvement correspondant, lequel sera appelé le $n^{\text{ième}}$ *harmonique*. Le premier harmonique, qui est aussi appelé le *mouvement fondamental*, a la plus longue période et la plus petite fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi}$. La fréquence du $n^{\text{ième}}$ harmonique est $f_n = \frac{n\omega}{2\pi} = nf$. Les fréquences des harmoniques sont donc les multiples successifs de la fréquence du fondamental.

Composons maintenant tous ces mouvements vibratoires, suivant la formule

$$x = \Sigma x_n = \Sigma(a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t). \tag{30}$$

Le mouvement résultant n'est pas un mouvement vibratoire simple. Mais, c'est tout de même un *mouvement périodique*, ayant pour période la période du fondamental. On dit encore que c'est un mouvement vibratoire, mais un *mouvement vibratoire composé*. La fréquence est encore le nombre de vibrations par seconde ; c'est évidemment la fréquence du fondamental.

Réciproquement, *tout mouvement vibratoire*, de période $\frac{2\pi}{\omega}$, *peut être considéré comme la résultante d'un nombre fini ou infini de mouvements vibratoires simples, dont les fréquences sont les multiples de la fréquence du mouvement proposé.*

Soit, en effet, $x = f(t)$ la loi du mouvement donné, $f(t)$ désignant, par conséquent, une fonction périodique, de période $\frac{2\pi}{\omega}$. Il faut démontrer qu'on peut la développer en série de la forme (30), à une constante additive près, provenant du choix de l'origine des élongations. Posons, pour simplifier l'écriture, $\omega t = u$ et appelons $F(u)$ la fonction $f\left(\frac{u}{\omega}\right)$, qui a pour période 2π. Il nous faut déterminer les coefficients constants a_n et b_n, de telle manière que l'on ait identiquement

$$F(u) = \frac{1}{2} b_0 + \Sigma\,(a_n \sin nu + b_n \cos nu). \tag{31}$$

A cet effet, on emploie l'artifice suivant. Pour calculer a_n, on multiplie les deux membres de l'identité par $\sin nu$ et l'on intègre par rapport à u entre 0 et 2π. Pour b_n, on procède de même, en multipliant par $\cos nu$. En s'appuyant sur les identités faciles à vérifier :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin nu \sin pu\, du = 0, \quad \text{si} \quad n \neq p, \quad \text{et} = \pi, \quad \text{si} \quad n = p; \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin nu \cos pu\, du = 0; \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nu \cos pu\, du = 0, \quad \text{si} \quad n \neq p, \quad \text{et} = \pi, \quad \text{si} \quad n = p. \end{array}\right.$$

on obtient

$$(33)\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u) \sin nu\, du, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u) \cos nu\, du.$$

Nous admettrons que les coefficients ainsi calculés conduisent à une série convergente et que la somme de cette série représente bien la fonction $F(u)$.

Finalement, notre proposition est démontrée et nous connaissons le moyen de calculer les harmoniques successifs, dont la superposition doit reproduire le mouvement donné.

Le développement (31) porte le nom de *série de Fourier*.

27. Mouvement vibratoire amorti. — C'est un mouvement défini par une équation de la forme

$$x = e^{-kt} \sin \omega t, \tag{34}$$

k désignant une constante positive. Ce n'est pas un mouvement périodique. Toutefois, si T désigne la période du sinus, le changement

de t en $t+T$ donne à l'élongation la valeur

$$x_1 = e^{-k(t+T)} \sin \omega t = e^{-kT} x = Dx, \tag{35}$$

en posant

$$D = e^{-kT}. \tag{36}$$

Autrement dit, la nouvelle élongation se déduit de la premiere, en la multipliant par le facteur constant D, qu'on appelle le *décrément* et dont le logarithme népérien $-kT$ est appelé *décrément logarithmique*. Nous dirons que le mouvement défini par l'élongation x_1 est homothétique, dans le rapport D, du mouvement défini par l'élongation x.

D'après cela, il suffit, pour connaître le mouvement en entier, de l'étudier pendant un intervalle quelconque de longueur T, par exemple entre les temps 0 et T. Le mouvement pendant la $(n+1)^{\text{ième}}$ période se déduira du mouvement pendant la première période par une homothétie dans le rapport D^n. Puisque $D < 1$, ce rapport décroît constamment et tend vers zéro, pour n infini. Le mouvement devient donc de plus en plus restreint et tend asymptotiquement vers le repos. C'est pour cela qu'on dit qu'il est *amorti*. L'amortissement est d'autant plus grand, au bout d'un nombre donné n de périodes, que le décrément D est plus petit, c'est-à-dire que l'exposant kT est plus grand.

L'amortissement au bout d'un temps t donné est mesuré par le facteur e^{-kt}. Ce facteur est d'autant plus petit que k est plus grand. C'est donc ce coefficient k qui mesure, en quelque sorte, la *rapidité de l'amortissement*.

28. *Étude du mouvement pendant la première période.* — Calculons la vitesse

$$v = \frac{dx}{dt} = e^{-kt}(-k \sin \omega t + \omega \cos \omega t). \tag{37}$$

Elle s'annule pour

$$\operatorname{tang} \omega t = \frac{\omega}{k}. \tag{38}$$

Quand t croît de 0 à T, ωt croît de 0 à 2π; donc $\operatorname{tang} \omega t$ s'annule deux fois. Si nous supposons ω positif, la vitesse s'annule pour la

première fois au temps t_1 compris entre o et $\frac{T}{4}$ et, pour la seconde fois, au temps $t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$. Les élongations correspondantes sont

(39) $$x_1 = e^{-kt_1} \sin \omega t_1 = e^{-kt_1} \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}},$$

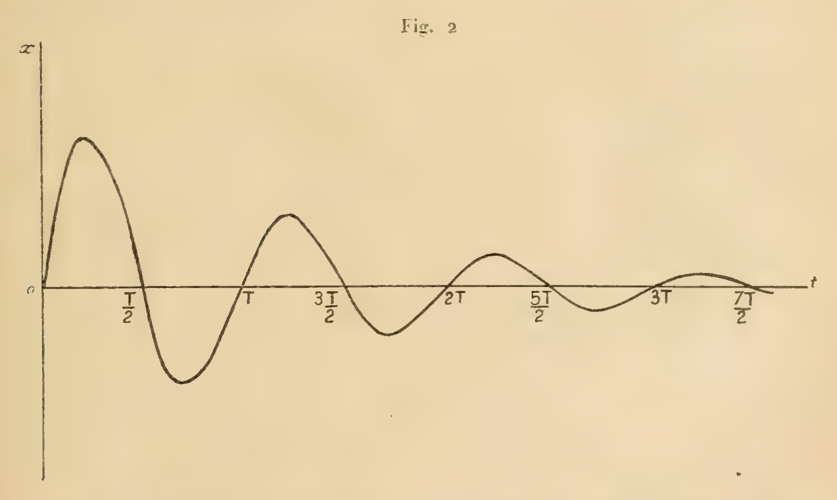
(40) $$x_2 = -x_1 e^{-k\frac{T}{2}} = -x_1\sqrt{D}.$$

On a le tableau de variation suivant :

t . . . o.		t_1		$\frac{T}{2}$		$t_1 + \frac{T}{2}$		T.
x . . . o	↗	x_1	↘	o	↘	$-x_1\sqrt{D}$	↗	o.

On en déduit le diagramme ci-dessous, que l'on peut compléter au delà du temps T, en réduisant les ordonnées dans le rapport D,

Fig. 2



D^2, etc. Ce diagramme est ce qu'on appelle une *sinusoïde amortie*. Ses maxima sont sur la courbe exponentielle

(41) $$x = e^{-kt} \sin \omega t_1$$

et ses minima sont sur la courbe symétrique par rapport à Ot. Les uns et les autres sont en progression géométrique décroissante.

29. Mouvement circulaire. — Pour définir le mouvement d'un point M qui décrit un cercle de centre O et de rayon R, il suffit de

se donner son angle polaire φ en fonction de t. On en déduit l'abscisse curviligne $s = R\varphi$. La vitesse algébrique $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$, en posant $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Cette quantité ω, qui mesure la vitesse de variation de l'angle polaire, porte le nom de *vitesse angulaire*.

Pour déterminer le vecteur accélération, le plus simple est de prendre ses composantes intrinsèques :

$$(2) \qquad \gamma_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt},$$

$$(3) \qquad \gamma_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

La dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ porte quelquefois le nom d'*accélération angulaire*.

Cas du mouvement uniforme. — Le mouvement est uniforme lorsque la vitesse angulaire ω est constante. En choisissant convenablement l'origine des temps (ou des angles polaires), on a $\varphi = \omega t$. Le vecteur accélération se réduit à l'accélératian normale, soit

$$(4) \qquad \vec{\gamma} = \omega^2 . \overrightarrow{MO}.$$

Il passe par O et c'est le seul cas où il en est ainsi, car cette condition entraîne la nullité de l'accélération tangentielle, donc de $\frac{d\omega}{dt}$.

Si l'on projette le point M sur un diamètre OX, d'angle polaire θ, l'abscisse de cette projection P est

$$(5) \qquad x = R\cos(\omega t - \theta).$$

Le mouvement du point P est donc un mouvement vibratoire simple, ayant pour période $\frac{2\pi}{\omega}$, c'est-à-dire la durée d'une révolution de M sur le cercle. Si l'on fait varier θ, on ne fait que changer l'angle de décalage. Les projections sur deux diamètres différents ont des mouvement décalés, l'un par rapport à l'autre, d'un angle égal à l'angle de ces diamètres. En particulier, les vibrations sur deux diamètres rectangulaires sont décalées de $\frac{\pi}{2}$.

30. Mouvement vibratoire elliptique. — Reprenons le mouvement circulaire uniforme précédent. Puis imaginons qu'on fasse tour-

ner le cercle d'un angle constant α autour de Ox et projetons le point M en m sur xOy. Le point m va décrire l'ellipse E projection du cercle, de telle manière que son anomalie excentrique φ (t. II, n° 539) soit proportionnelle au temps. Un tel mouvement s'appelle *mouvement vibratoire elliptique*. Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, on l'appelle par extension, *mouvement vibratoire circulaire*, bien que ce soit, en réalité, un simple mouvement circulaire uniforme.

Si l'on projette l'égalité géométrique (44) sur le plan xOy, on obtient la même égalité pour le point m. *Le vecteur accélération passe donc par le centre de l'ellipse. Réciproquement*, si l'on suppose cette propriété, elle a également lieu pour le cercle; le mouvement de M est uniforme et celui de m est une vibration elliptique.

Le mouvement obéit à la loi des aires, car il en est évidemment ainsi pour le mouvement circulaire de M.

Si l'on décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, suivant deux diamètres rectangulaires, on sait que les points P et Q sont animés de mouvements vibratoires décalés d'un angle droit. D'autre part, la projection d'un mouvement vibratoire simple sur un plan est évidemment un mouvement analogue, de même période et de même phase. Il s'ensuit que les points p et q, projections de P et de Q, sont animés de mouvements vibratoires décalés de $\frac{\pi}{2}$ l'un par rapport à l'autre. Remarquons d'ailleurs que les trajectoires de ces mouvements sont deux diamètres conjugués de l'ellipse, puisque ce sont les projections de deux diamètres rectangulaires, donc conjugués du cercle. On peut, dès lors, énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'on décompose le vecteur $\overrightarrow{Om}$ suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse, en $\overrightarrow{Op}$ et $\overrightarrow{Oq}$*, les points p et q *sont animés de mouvements vibratoires simples décalés d'un angle droit.*

31. Composition de deux mouvements vibratoires simples de même période et de directions différentes. — Supposons qu'un point M exécute, sur Px, la vibration

$$x = a \cos \omega t \tag{46}$$

et qu'en même temps, l'axe Px se déplace parallèlement à Ox, de

telle manière que P exécute, sur Oy, la vibration

$$(47)\qquad y = a' \cos\omega t + b \sin\omega t.$$

Cherchons quel est le mouvement résultant du point M par rapport aux axes Oxy.

Ce mouvement est défini par les équations (46) et (47), car x et y sont évidemment les coordonnées du point M. Nous aurons l'équation de la trajectoire en éliminant t entre ces deux équations. A cet effet, nous tirons $\cos\omega t$ de la première, puis $\sin\omega t$ de la seconde et nous portons dans la relation fondamentale qui relie le cosinus et le sinus d'un même angle; nous obtenons ainsi l'équation

$$(48)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{a'}{a}x\right)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre O.

Pour caractériser le mouvement de M sur cette ellipse, remarquons qu'en dérivant deux fois les équations (46) et (47), on obtient les identités

$$(49)\qquad x'' = -\omega^2 x, \qquad y'' = -\omega^2 y.$$

Elles expriment l'égalité géométrique

$$(50)\qquad \overrightarrow{\gamma} = \omega^2 . \overrightarrow{MO}.$$

Le vecteur accélération passant par le centre de l'ellipse, on en conclut, d'après le numéro précédent, que *le mouvement du point* M *est une vibration elliptique*.

Pour que les axes Ox et Oy soient deux diamètres conjugués de l'ellipse, il faut et il suffit, d'après l'équation (48), que a' soit nul; ceci revient à dire que les mouvements proposés doivent être décalés de $\frac{\pi}{2}$. On retrouve le théorème de la fin du numéro précédent et, en même temps, sa réciproque.

Pour que l'ellipse se réduise à l'un de ses diamètres, il faut et il suffit que l'un des coefficients a et b soit nul. Le cas où a serait nul est sans intérêt, car il revient à supprimer l'une des vibrations composantes. La condition $b = 0$ exprime, au contraire, que les deux vibrations proposées sont décalées de 0 ou π. Par un choix conve-

nable du sens de Ox, par exemple, on peut, en somme, toujours dire qu'*elles doivent avoir même phase*.

32. *Généralisation.* — On peut, plus généralement, composer un nombre quelconque de vibrations rectilignes ou elliptiques de même période. En les rapportant toutes à trois axes $Oxyz$ quelconques et ajoutant les coordonnées de même nom, on obtient les équations du mouvement résultant sous la forme [1]

$$(51)\quad \begin{cases} x = a\cos\omega t + a'\sin\omega t, \\ y = b\cos\omega t + b'\sin\omega t, \\ z = c\cos\omega t + c'\sin\omega t. \end{cases}$$

La trajectoire est encore une ellipse.

De plus, on a encore les identités (49) et l'identité analogue en z. On en conclut, comme précédemment, que *le mouvement est toujours une vibration elliptique*.

33. Mouvement hélicoïdal. — Imaginons un point M, dont la projection P sur xOy décrive un cercle, de centre O et de rayon R et dont la projection Q sur Oz ait constamment une vitesse proportionnelle à la vitesse angulaire de P, soit

$$(52)\quad z' = k\omega = k\frac{d\varphi}{dt}.$$

En intégrant par rapport au temps et choisissant convenablement l'origine des z ou des φ, on a

$$(53)\quad z = k\varphi.$$

On en conclut que la trajectoire est une hélice circulaire, de pas k (t. II, n° 617).

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ est la somme géométrique des vecteurs vitesse de P et de Q. (Cela résulte du théorème du n° 4 ou bien, si l'on veut, du théorème de la composition des vitesses, en regardant le mouvement de M comme résultant de la composition du mouvement de P avec la translation d'entraînement que prendrait le trièdre $Oxyz$ si on lui donnait, à chaque instant, le point Q pour origine.)

---

[1] Nous avons négligé les constantes additives qui s'introduisent si les vibrations n'ont pas même centre et dont on peut toujours se débarrasser par un changement d'origine des coordonnées.

Ces deux vecteurs sont rectangulaires et ont pour longueurs respectives $R\omega$ et $k\omega$. Si on les mène par le point M, ils forment un rectangle qui demeure constamment semblable à lui-même. On en conclut que le vecteur $\overrightarrow{MV}$ fait un angle constant θ avec Oz et l'on retrouve une propriété classique de l'hélice (t. II, n° 616). En outre, si v désigne la longueur de ce vecteur, on a

$$(54) \qquad v\cos\theta = k\omega, \qquad v\sin\theta = R\omega;$$

d'où

$$(55) \qquad \tang\theta = \frac{R}{k}.$$

On retrouve également une formule rencontrée en Géométrie (t. II, n° 618).

Le vecteur accélération se déterminerait de la même manière que le vecteur vitesse. (On peut appliquer le théorème signalé au n° 5 ou bien le théorème de la composition des accélérations, puisque le mouvement d'entraînement est une translation.) Bornons-nous à considérer le *cas où le mouvement est uniforme*. Nous devons alors supposer ω constant. L'accélération du point Q est nulle. Quant à celle de P, c'est le vecteur $\omega^2\overrightarrow{PO}$ (n° 29). L'accélération de M est donc équipollente à ce vecteur.

On peut déduire de là deux propriétés classiques de l'hélice. D'abord, la normale principale de cette courbe est la normale au cylindre rectifiant puisque, dans le cas du mouvement uniforme, elle doit porter le vecteur accélération.

Ensuite, si ρ désigne le rayon de courbure de l'hélice, l'accélération doit être égale à $\frac{v^2}{\rho}$. Mais, d'autre part, nous savons qu'elle est égale à $\omega^2 R$. On a donc, en tenant compte de (54),

$$(56) \qquad \rho = \frac{v^2}{\omega^2 R} = \frac{v^2 R}{v^2\sin^2\theta} = \frac{R}{\sin^2\theta}.$$

CHAPITRE III.

CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE.

Dans ce Chapitre, nous allons étudier d'abord quelques mouvements particuliers remarquables du corps solide. Nous dirons ensuite quelques mots du mouvement le plus général.

34. Translation. — *Un corps solide* S *est animé d'un mouvement de translation par rapport à un trièdre de référence* T, *si chaque droite invariablement liée à* S *garde une direction invariable par rapport à* T. Autrement dit, chaque droite du corps solide se déplace parallèlement à elle-même.

On peut schématiser S par un trièdre $O'xyz$ parallèle au trièdre de référence $Oxyz$, puisque, d'après la définition même, chacun des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ reste constamment parallèle à sa direction primitive, laquelle a évidemment pu être prise parallèle à l'axe de même nom du trièdre de référence. Si a, b, c sont les coordonnées absolues de O′ et x', y', z' les coordonnées relatives constantes d'un point quelconque M du corps solide, ses coordonnées absolues sont

$$(1) \qquad x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z'.$$

Ces formules constituent les équations du mouvement de M.

Théorème I. — *Les trajectoires des différents points de* S *sont des courbes égales, pouvant se déduire par translation de l'une quelconque d'entre elles.*

En effet, soient M et P deux points quelconques de S dans leur position au temps t, et soient M′ et P′ leurs positions au temps t'. Comme le vecteur $\overrightarrow{MP}$ se déplace parallèlement à lui-même et garde une longueur invariable, il est équipollent à $\overrightarrow{M'P'}$, quel que soit t'.

Il en résulte que la translation géométrique qui est représentée par ce vecteur amène la trajectoire de M en coïncidence avec la trajectoire de P.

Ceci se voit d'ailleurs tout aussi bien sur les équations (1), qui montrent que la trajectoire de M se déduit de celle de O' par la translation qui a pour composantes x', y', z', c'est-à-dire qui est représentée par le vecteur $\overline{O'M}$.

Théorème II. — *Tous les points de* S *ont, à chaque instant, des vecteurs vitesse équipollents.*

Car, si l'on dérive les équations (1) par rapport au temps, il ne reste, aux seconds membres, que les dérivées de a, b, c, puisque x', y', z' sont des constantes. Ceci prouve que le vecteur vitesse de M est équipollent au vecteur vitesse de O'.

Théorème III. — *Tous les points de* S *ont, à chaque instant, des vecteurs accélération équipollents.*

Cela résulte du théorème II et de la définition du vecteur accélération. On peut aussi le vérifier en prenant les dérivées secondes des formules (1).

35. La translation est dite *rectiligne* quand toutes les trajectoires sont des droites. D'après le théorème I, il suffit que la trajectoire d'un point particulier soit une droite pour que les trajectoires de tous les autres points soient des droites parallèles. Toute droite D du corps solide parallèle à la direction commune de toutes ces trajectoires coïncide constamment avec la trajectoire de chacun de ses points; autrement dit, elle *glisse sur elle-même* pendant la translation. Réciproquement, si deux droites D et D' d'un corps solide glissent sur elles-mêmes pendant le mouvement de ce corps, ce mouvement est une translation rectiligne. Il est en effet facile de démontrer que toute droite invariablement liée à ces deux droites garde une direction invariable. Cette propriété est utilisée, dans l'Industrie, pour réaliser, par des *glissières*, les translations rectilignes.

Si le mouvement d'un point est rectiligne et uniforme, il en est de même, en vertu du théorème II, des mouvements de tous les points. On dit alors qu'on a une *translation rectiligne et uniforme*. Elle est entièrement déterminée par *son vecteur vitesse.*

La translation est dite *circulaire* lorsque les trajectoires sont des cercles.

36. Rotation. — *Un corps solide* S *est animé d'un mouvement de rotation lorsqu'il possède une infinité de points fixes, qui sont tous les points d'une droite* A, *appelée axe de rotation*. Il suffit évidemment, pour qu'il en soit ainsi, que deux points seulement de A soient fixes. On ne saurait ensuite fixer aucun point extérieur à A, sans immobiliser complètement tout le corps solide.

Il faut bien préciser, dans la définition du mouvement de rotation, que les points de l'axe doivent être fixes et ne pas se contenter de dire que le corps solide doit avoir une droite fixe, car si on lui impose seulement cette condition, il peut à la fois tourner autour et glisser le long de cette droite. C'est pourquoi, dans l'Industrie, il ne suffit pas de faire reposer l'*arbre* d'une machine sur des *coussinets;* il faut encore le préserver de tout glissement longitudinal au moyen de deux *épaulements*.

Pour définir analytiquement un mouvement de rotation, il est commode de prendre l'axe de rotation pour axe des z commun au trièdre de référence $Oxyz$ et au trièdre mobile $OXYz$ qui schématise le corps solide. On donne, en outre, la même origine aux deux trièdres. Le mouvement est alors entièrement déterminé par la connaissance de l'angle $(\widehat{Ox.\,OX}) = \varphi$, en fonction du temps. Cet angle porte quelquefois le nom d'*azimut* du corps solide.

Si (X, Y, Z) sont les coordonnées relatives constantes d'un point quelconque M du corps solide, ses coordonnées absolues sont (t. II, n° 34)

$$(2) \qquad x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \qquad z = Z.$$

Ces formules constituent les équations du mouvement de M.

37. *Tout point* M *du corps solide décrit un cercle*, dont le centre est la projection P de M sur l'axe A, dont le rayon est la distance $r = MP$ et dont le plan est perpendiculaire à A. [On peut résumer tout ceci, en disant que A est l'axe du cercle (t. II, n° 189).]

On appelle *vitesse angulaire* du corps solide la dérivée de son

azimut par rapport au temps, soit

$$(3) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

On appelle *vecteur instantané de rotation* au temps t un vecteur $\vec{\Omega}$, porté par l'axe A et ayant pour mesure algébrique ω. Ceci suppose, bien entendu, que A est orienté, le sens de cette orientation servant à la fois pour la mesure algébrique de $\vec{\Omega}$ et pour celle de l'azimut φ (t. II, n° 27), comme cela a lieu pour l'axe Oz du numéro précédent. Grâce à cette convention, le sens positif de rotation défini par $\vec{\Omega}$ coïncide, à chaque instant, avec le sens de rotation du corps solide.

La définition précédente suppose aussi que l'on a choisi les unités de longueur et de temps, car elle détruit l'homogénéité, puisqu'une vitesse angulaire n'a pas les dimensions d'une longueur (n° 115).

Enfin, il n'est pas nécessaire de spécifier quelle est, sur A, l'origine de $\vec{\Omega}$; autrement dit, ce vecteur doit être considéré comme un *vecteur glissant* (t. II, n° 106).

Théorème. — *Le vecteur vitesse d'un point quelconque* M *du corps solide est le moment du vecteur instantané de rotation par rapport à ce point :*

$$(4) \qquad \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{\Omega, M}.$$

En effet, il est facile de vérifier que les trois conditions qui définissent ce moment (t. II, n° 106) sont bien remplies par le vecteur $\overrightarrow{MV}$. D'abord, il est bien perpendiculaire au plan (M, Ω) ou (M, A). Ensuite, sa longueur est (n° 29)

$$v = r\omega = MP \times \Omega \quad (^1).$$

Enfin, son sens est celui du mouvement, lequel est précisément le sens positif de rotation défini par le vecteur $\vec{\Omega}$; cela coïncide bien avec le sens que doit avoir le vecteur moment (*cf.* t. II, note de la page 117).

Au reste, on arrive au même résultat en dérivant les formules (2) par rapport au temps :

$$(5) \qquad x' = -y\omega, \qquad y' = x\omega.$$

C'est bien ce que donnent les formules (17) du n° 108 du Tome II, si on les applique au moment $\overrightarrow{\Omega, M}$.

---

[1] Cette formule rétablit l'homogénéité, qui est détruite en sens contraire dans la définition du vecteur instantané de rotation et dans celle du vecteur moment (*cf.* t. II, note de la page 116).

Ce théorème est d'une application très commode pour calculer les composantes du vecteur vitesse dans un mouvement de rotation quelconque, dont on connaît seulement le vecteur instantané de rotation. Par exemple, s'il s'agit d'une rotation autour d'un axe passant par O et si p, q, r sont les composantes au temps t du vecteur instantané de rotation suivant un trièdre quelconque (fixe ou mobile) ayant pour origine O, les composantes suivant ces axes du vecteur vitesse d'un point M quelconque du corps solide, qui, au temps t, a pour coordonnées (x, y, z) par rapport à ce trièdre, sont

$$(6) \qquad V_x = qz - ry, \qquad V_y = rx - pz, \qquad V_z = py - qx,$$

ainsi qu'il résulte de l'application des formules (17) ci-dessus rappelées.

38. Le vecteur accélération du point M se détermine, comme on l'a vu au n° 29, par ses composantes intrinsèques. L'accélération tangentielle se construit, au moyen de l'accélération angulaire, comme le vecteur vitesse se construit au moyen de la vitesse angulaire.

Si l'on introduit le *vecteur accélération angulaire*, qui n'est autre que la dérivée du vecteur instantané de rotation, on voit que l'accélération tangentielle de M est le moment de ce vecteur accélération angulaire par rapport à M.

Quant au vecteur accélération normale, il est égal à $\omega^2 \overrightarrow{MP}$.

39. Mouvement hélicoïdal. — *Un corps solide est animé d'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe* Δ, *lorsqu'il tourne autour et glisse le long de cet axe de telle manière que le glissement soit constamment proportionnel à la rotation.*

Dans ce mouvement, l'axe Δ est fixe en tant que droite géométrique, mais non en tant que droite matérielle, comme cela avait lieu dans le mouvement de rotation. Elle glisse sur elle-même, mais aucun de ses points n'est fixe.

Pour définir analytiquement un mouvement hélicoïdal, il est commode de prendre, comme au n° 36, l'axe Δ pour axe des z commun au trièdre de référence et au trièdre mobile attaché au corps solide. Mais, cette fois, l'origine O' de ce deuxième trièdre n'est plus fixe : elle glisse sur Oz et sa cote h est une fonction du temps liée à

l'azimut φ par une relation de la forme

$$(7) \qquad h = k\varphi,$$

où k désigne une constante [1].

On appelle *pas* du mouvement la longueur dont glisse le corps solide pour une rotation d'un tour complet. Si, comme nous le supposons toujours, l'angle φ est évalué en radians, ce pas est

$$(8) \qquad P = 2\pi k.$$

La constante k est aussi quelquefois appelée le *pas* (pas théorique ou pas réduit), ainsi que nous l'avons expliqué au n° 617 du Tome II. Mais, en Mécanique appliquée, quand on parle du pas, il s'agit toujours du pas vulgaire P.

Si (X, Y, Z) sont les coordonnées constantes du point M par rapport au trièdre mobile O'XYZ, ses coordonnées absolues sont données par les formules (2), la troisième de ces formules étant seulement remplacée par

$$(9) \qquad z = Z + k\varphi.$$

Les trajectoires des différents points du corps solide sont toutes des hélices, d'axe A et de pas P (ou k).

Pour avoir le vecteur vitesse d'un point quelconque M, on peut se reporter au n° 33. On peut aussi introduire le trièdre intermédiaire O'xyz parallèle au trièdre de référence et considérer le mouvement hélicoïdal comme résultant d'une rotation, de vitesse angulaire $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, autour de O'Z et d'une translation, de vitesse $\frac{dh}{dt} = k\omega$, suivant Oz.

Avec cette dernière interprétation, on est conduit à introduire le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\Omega}$, porté par Oz et de mesure algébrique ω. Si $\overrightarrow{H}$ désigne le vecteur libre qui a pour mesure algébrique $k\omega$ suivant Oz, on a

$$(10) \qquad \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{H} + \overrightarrow{\Omega, M};$$

ce que l'on peut interpréter en disant que le vecteur vitesse du point M est le

---

[1] Dans la formule (7), on pourrait ajouter une constante au second membre; mais on peut toujours s'en débarrasser en choisissant convenablement l'origine des cotes ou l'origine des azimuts.

moment résultant, par rapport à ce point, du torseur constitué par le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ et par le couple d'axe $\vec{H}$.

Quant au vecteur accélération, il se compose, comme dans le cas du mouvement de rotation (n° 38), de l'accélération tangentielle, qui peut être définie par une égalité analogue à (10), en remplaçant simplement la vitesse angulaire par l'accélération angulaire, et de l'accélération normale, qui est toujours $\omega^2\overrightarrow{MP}$, en désignant par P la projection de M sur l'axe.

40. En Mécanique appliquée, le mouvement hélicoïdal se réalise au moyen d'une *vis* et d'un *écrou*.

Pour définir la vis, considérons un cylindre de révolution appelé *noyau* et une aire plane appelée *profil*, située dans un plan méridien du cylindre et limitée vers l'intérieur de celui-ci par un segment AB faisant partie de la génératrice G (*fig.* 3). Imprimons à ce profil un

Fig. 3.

mouvement hélicoïdal autour de l'axe Oz du cylindre. Il engendre un solide, que nous supposons solidaire du noyau, et qui porte le nom de *filet*. Si l'on s'arrange pour recouvrir toute la surface latérale du noyau par des filets semblables, on obtient une *vis*. Le *pas de la vis* est le pas du mouvement hélicoïdal générateur du filet ou, si l'on veut, la distance qui sépare, sur une même génératrice, deux positions consécutives AB et A′B′ du segment qui limite le profil. Pour que le noyau puisse être recouvert entièrement par des filets iden-

tiques, il faut que AB soit contenu un nombre entier de fois n dans le pas. Entre deux spires consécutives, il y a alors n filets et l'on dit que la vis est une *vis à n filets*. Les vis à faible pas, qui sont les plus communes dans l'Industrie, sont toujours des vis à un filet. Mais certaines vis à grand pas doivent être construites à plusieurs filets, si l'on veut éviter de donner des dimensions exagérées au profil.

Le profil le plus employé est le triangle équilatéral; les vis correspondantes portent le nom de *vis à filet triangulaire*. Mais on emploie aussi des *vis à filet carré*, dont le profil est un carré. La vis est dite *à droite* ou *à gauche*, suivant que les hélices qui limitent ses filets sont des hélices à droite ou à gauche (t. II, n° 617).

Imaginons maintenant un corps solide dans lequel on a creusé une cavité ayant exactement la forme d'une vis donnée V; nous obtenons un *écrou* E, complémentaire de la vis V.

Si l'on fixe l'écrou et qu'on y engage la vis en la faisant tourner autour de son axe, elle va nécessairement prendre un mouvement hélicoïdal, de même axe et de même pas que la vis, réalisant ainsi le glissement d'un hélicoïde sur lui-même (t. II, n° 366). Inversement, si l'on fixe la vis, c'est l'écrou qui prend un mouvement hélicoïdal.

On peut aussi faire tourner la vis autour de son axe et assujettir l'écrou, au moyen de glissières, à garder une orientation invariable. Il prend alors un mouvement de translation parallèle à l'axe de la vis. Par rapport à V, le mouvement doit toujours être le même mouvement hélicoïdal. Il en résulte que la vitesse de translation de l'écrou doit constamment être dans le rapport $\frac{P}{2\pi}$ avec la vitesse angulaire de la vis. On peut encore dire que l'écrou avance proportionnellement à l'angle dont tourne la vis, au taux de P pour un tour complet. Ce principe est utilisé fréquemment en Mécanique appliquée; par exemple, c'est sur lui que repose l'emploi de la *vis mère* d'un tour quand on se sert de ce dernier pour exécuter un filetage.

41. Mouvement plan; centre instantané de rotation. — On dit qu'un corps solide S est animé d'un *mouvement plan* lorsqu'un plan P invariablement lié à S glisse constamment sur lui-même pendant le mouvement. Tous les plans parallèles à P jouissent évidemment de la même propriété.

Il est clair qu'on peut se borner à étudier le mouvement du disque découpé par le plan P dans le corps solide, car le mouvement de tout point de S extérieur à P est identique au mouvement de sa projection sur P. Autrement dit, le mouvement particulier actuellement envisagé se ramène au mouvement

d'une figure plane dans son plan, c'est-à-dire à la Cinématique générale du corps solide en Géométrie plane.

Nous avons déjà étudié ce problème, à un point de vue purement géométrique, dans le Tome II (Chap. XXXIX, Exercice résolu n° 1). Nous allons le reprendre du point de vue cinématique, en nous bornant d'ailleurs à l'étude de la distribution des vitesses.

Soient Oxy les axes de référence et $O'x'y'$ les axes mobiles, qui schématisent notre corps solide. Introduisons les axes intermédiaires $O'xy$ parallèles à Oxy et d'origine O'. Le mouvement de $O'x'y'$ par rapport à Oxy résulte de la composition du mouvement de $O'x'y'$ par rapport à $O'xy$ et du mouvement de $O'xy$ par rapport à Oxy. Or, ces deux mouvements nous sont connus; le premier est une rotation autour de O' et le second est une translation. Soit $\overrightarrow{O'\Omega}$ le vecteur instantané de rotation du premier mouvement (n° 37), c'est-à-dire le vecteur perpendiculaire au plan Oxy, de longueur égale à la vitesse angulaire ω de $O'x'y'$ par rapport à $O'xy$ et dont le sens est tel que le sens positif de rotation qu'il définit dans le plan $O'xy$ coïncide avec le sens du mouvement. Soit, d'autre part, $\overrightarrow{W}$ le vecteur vitesse de la translation (n° 34) La vitesse absolue d'un point M quelconque de la figure mobile est

$$(11) \qquad \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{O'\Omega, M} = \overrightarrow{S, M},$$

en appelant S le système de vecteurs constitué par le vecteur $\overrightarrow{O'\Omega}$ et par le couple d'axe $\overrightarrow{W}$ (t. II, n° 120). Or, ce vecteur et cet axe de couple sont rectangulaires; donc, le système S est réductible à un vecteur unique (t. II, n° 121). Ce vecteur unique est équipollent à $\overrightarrow{O'\Omega}$ et son origine I est un certain point, que nous saurions construire à partir des éléments $\overrightarrow{O'\Omega}$ et $\overrightarrow{W}$. L'égalité (11) peut maintenant s'écrire

$$(12) \qquad \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{I\Omega, M};$$

en la rapprochant de (4), nous pouvons en conclure le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un mouvement plan quelconque, la distribution des vitesses est, à chaque instant, la même que dans un certain mouvement de rotation, qu'on appelle la rotation tangente et dont le vecteur instantané* $\overrightarrow{I\Omega}$ *est appelé le vecteur instantané de rotation du mouvement plan.*

Si l'on s'en tient à ce qui passe dans le plan Oxy, on peut dire que la distribution des vitesses est la même, à l'instant t, que si la figure plane mobile était animée d'une rotation, de vitesse angulaire ω, autour d'un certain point I, que l'on appelle le *centre instantané de rotation.*

42. Propriétés du centre instantané de rotation. — Si le mouvement pro-

posé ne se réduit pas à un mouvement de rotation, le point I varie avec le temps t. Il décrit donc une certaine courbe C par rapport aux axes fixes Oxy et une autre courbe C′ par rapport aux axes mobiles $O'x'y'$. Le mouvement de I sur C est le mouvement absolu et son mouvement sur C′ est le mouvement relatif. Le mouvement d'entraînement ou mouvement de C′ par rapport à C n'est autre que le mouvement proposé. D'après le théorème du numéro précédent, la vitesse d'entraînement de I est nulle puisque, dans une rotation, les points de l'axe ne bougent pas. Dès lors, si l'on applique le théorème de la composition des vitesses (n° 15), on voit que la vitesse absolue de I coïncide avec sa vitesse relative. Comme ces deux vecteurs sont tangents respectivement à C et à C′, ces deux courbes sont, à chaque instant, tangentes en I. Orientons-les maintenant de telle manière qu'elles aient même demi-tangente positive; les vitesses algébriques (n° 6) absolue et relative doivent être égales; donc, si s et s' sont les abscisses curvilignes de I sur C et sur C′, on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}, \qquad \text{d'où} \qquad s = s',$$

en choisissant convenablement l'origine des arcs sur chaque courbe. On dit que *la courbe* C′ *roule sans glisser sur la courbe* C. La première courbe porte le nom de *courbe roulette* et la seconde s'appelle *courbe base*.

Réciproquement, si l'on fait rouler, sans glissement, une courbe C′ sur une courbe C, le point de contact I est, à chaque instant, le centre instantané de rotation du mouvement de C′ par rapport à C. Cela se démontre en remontant le raisonnement précédent. On prouve que le point I a une vitesse d'entraînement nulle et, par conséquent, se trouve nécessairement au centre instantané de rotation.

Théorème I. — *Les normales aux trajectoires des différents points du plan mobile passent, à chaque instant, par le centre instantané de rotation.*

Car ces trajectoires sont tangentes aux vecteurs vitesses, lesquels sont tangents à des cercles de centre I.

Théorème II. — *Toute courbe* Λ *entraînée par le plan mobile admet, par rapport au plan fixe, une enveloppe* E, *dont les points de contact sont, à chaque instant, les pieds des normales abaissées du centre instantané sur* Λ.

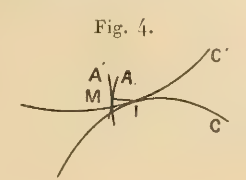
En effet, soit M un de ces points de contact. Il décrit Λ par rapport au plan mobile et E par rapport au plan fixe. Sa vitesse sur Λ est la vitesse relative et sa vitesse sur E est la vitesse absolue. Ces vecteurs sont portés tous deux par la tangente commune MT aux deux courbes. Il en est donc de même de leur différence géométrique, c'est-à-dire de la vitesse d'entraînement. Mais nous savons que cette vitesse est perpendiculaire à MI; cette dernière droite est donc bien normale en M à Λ.

Réciproquement, si M est un pied de normale, la vitesse d'entraînement et la vitesse relative sont toutes deux portées par la tangente MT à A. Il en est donc de même de leur somme géométrique, c'est-à-dire de la vitesse absolue. Comme cette dernière vitesse est tangente à la trajectoire absolue de M, cette trajectoire est tangente en M à A ; c'est donc l'enveloppe.

43. Engrenages. — Grâce à la théorie précédente, on peut réaliser matériellement n'importe quel mouvement plan, en construisant un engrenage.

Le problème se ramène à faire rouler sans glissement une courbe C′ sur une courbe C. A cet effet, on garnit chaque courbe d'une série de dents taillées de

Fig. 4.



telle manière que, pendant le roulement, les dents qui sont au voisinage du point de contact I soient constamment tangentes. Si A′ désigne la courbe ou *profil* qui limite une dent de C′, le profil A de la dent de C qui lui reste tangente est l'enveloppe de A′ dans le roulement de C′ sur C. On peut le construire par points, en utilisant le théorème II du numéro précédent ; on abaisse la normale IM sur A′ et le lieu de M par rapport au plan de C est la courbe A. Les profils A et A′ sont appelés *profils conjugués*. Les courbes C et C′ sont appelées *courbes primitives*.

Dans les engrenages dont on se sert dans l'Industrie, les courbes primitives sont presque toujours des circonférences, dites *circonférences primitives;* on obtient alors des *roues dentées* ou *pignons*.

On peut les utiliser de différentes manières. On peut fixer C et faire rouler C′, qui porte alors le nom de *satellite*. Chaque point de C′ décrit une épicycloïde (ou une hypocycloïde, si C′ roule à l'intérieur de C); c'est pourquoi ce dispositif porte quelquefois le nom de *train épicycloïdal*.

Le plus souvent, on fixe les axes O et O′ des deux roues, autour desquels elles peuvent alors tourner librement, réalisant ainsi la transmission de deux rotations autour de deux axes parallèles, qui est un des problèmes les plus fréquents de la Cinématique appliquée.

Soient R et R′ les rayons des deux roues et ω et ω′ leurs vitesses angulaires. Le point de contact M doit avoir même vitesse, qu'on le considère comme appartenant à l'une ou l'autre des deux roues, puisque sa vitesse d'entraînement dans le mouvement de C′ par rapport à C doit être nulle. De là résulte la relation

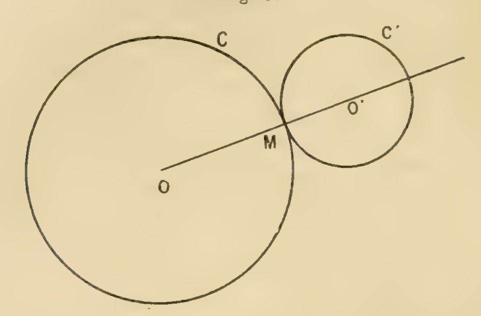
$$R\omega = R'\omega', \tag{13}$$

les vitesses angulaires devant, d'autre part, être de même signe ou de signes

contraires, suivant que les roues engrènent intérieurement ou extérieurement.

Un dispositif plus général et dont les deux précédents sont les cas extrêmes consiste à fixer seulement l'un des axes, par exemple O, et à faire tourner à la fois C et la ligne des centres OO′ autour de cet axe. Soient ω, ω' et a les vitesses angulaires de C, de C′ et de OO′. Par rapport à des axes invariablement

Fig. 5.



liés à OO′, ces vitesses sont toutes diminuées de a [1] et deviennent $\omega - a$, $\omega' - a$, o. Mais, on se trouve alors dans le cas particulier examiné plus haut et qui donnait lieu à la formule (13). Pour avoir une formule algébrique générale, convenons de donner le même signe aux deux rayons R et R′ ou des signes contraires, suivant que les roues engrènent extérieurement ou intérieurement; nous avons alors

$$\text{(14)} \qquad R(\omega - a) + R'(\omega' - a) = 0;$$

d'où l'on tire, par exemple,

$$\text{(15)} \qquad a = \frac{R\omega + R'\omega'}{R + R'}.$$

Dans la pratique, on remplace ordinairement, dans l'application des formules (13), (14), (15), les rayons R et R′ par les nombres de dents, n et n', qui leur sont évidemment proportionnels.

Lorsque l'un des rayons est infini, on obtient une *crémaillère*, qui sert ordinairement à transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation perpendiculaire à l'axe de la rotation.

---

(1) Si un angle OXY tourne autour de son sommet O, avec la vitesse angulaire ω par rapport aux axes fixes Oxy, et avec la vitesse angulaire ω' par rapport aux axes $Ox'y'$, lesquels tournent eux-mêmes avec la vitesse angulaire a par rapport à Oxy, on a : $\omega' = \omega - a$. Cela résulte, en effet de ce que les angles $\varphi = (\widehat{Ox, OX})$, $\varphi' = (\widehat{Ox', OX})$ et $\alpha = (\widehat{Ox, Ox'})$ sont liés par la relation $\varphi' = \varphi - \alpha$. Cela peut aussi se déduire de la composition des rotations (n° 46).

44. Pivotement d'un corps solide autour d'un point fixe. — Soit le trièdre $Ox'y'z'$ qui pivote autour de son sommet O, par rapport au trièdre de référence $Oxyz$, auquel nous donnons le même sommet. Pour obtenir la distribution des vitesses dans ce mouvement, introduisons les trièdres intermédiaires T_1, T_2, que nous avons considérés au n° 36 du Tome II, à propos des angles d'Euler. On peut écrire l'égalité symbolique (n° 13)

$$(16)\qquad (T', T) = (T_1, T) + (T_2, T_1) + (T', T_2).$$

Or, chacun des trois mouvements du second membre est une rotation autour de l'axe commun aux deux trièdres qu'il fait intervenir. Soient $\vec{\Omega}_1$, $\vec{\Omega}_2$, $\vec{\Omega}_3$ les vecteurs instantanés de rotation correspondants. (Avec les notations du n° 36 du Tome II, ils ont pour mesures algébriques respectives ψ' sur Oz, θ' sur Ox_1, φ' sur Oz'.) D'après le théorème de la composition des vitesses et, d'après le théorème du n° 37, la vitesse d'un point M quelconque de T' par rapport à T est

$$(17)\qquad \overrightarrow{MV} = \overline{\Omega_1, M} + \overrightarrow{\Omega_2, M} + \overrightarrow{\Omega_3, M}.$$

Si nous considérons maintenant le vecteur $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 + \vec{\Omega}_3$, nous avons, d'après le théorème de Varignon (t. II, n° 116),

$$(18)\qquad \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{\Omega, M}.$$

Finalement, *le mouvement considéré est, à chaque instant, tangent à une rotation autour d'un axe passant par* O, *qui s'appelle l'axe instantané de rotation.*

Par analogie avec le n° 42, on peut considérer les deux cônes C et C' engendrés par cet axe par rapport à T et par rapport à T'. En raisonnant comme au n° 42, on démontre que toute courbe tracée sur C' roule sans glisser sur une courbe de C et l'on dit que le cône C' roule sans glisser sur le cône C. Pour cette raison, C' est appelé le *cône roulette* et C le *cône base*.

En Mécanique appliquée, on réalise un tel mouvement au moyen d'un *engrenage conique*, qui se définit au moyen des cônes C et C' comme l'engrenage plan a été défini au moyen des courbes C et C', au n° 43. Dans la pratique, les cônes C et C' sont presque toujours de révolution.

45. Mouvement général d'un corps solide. — Soit le trièdre T' ou $O'x'y'z'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport au trièdre de référence T ou $Oxyz$. Introduisons le trièdre intermédiaire T_1 de sommet O' et parallèle à T. On peut écrire symboliquement

$$(19)\qquad (T', T) = (T_1, T) + (T', T_1).$$

Or, le premier mouvement est une translation, dont la vitesse $\vec{W}$ est le vecteur vitesse de O'. Quant au second, c'est un pivotement autour du

point O′ et nous savons (n° 44) qu'il est tangent à une rotation représentée par un vecteur $\overrightarrow{O'\Omega}$ passant par O′. Si nous appliquons le théorème de la composition des vitesses, nous voyons que la vitesse d'un point quelconque M de T′ par rapport à T est

$$\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{W} + \overline{\overrightarrow{O'\Omega}. M}. \tag{20}$$

On peut la considérer comme le moment résultant, par rapport à M, du système de vecteurs constitué par le vecteur $\overrightarrow{O'\Omega}$ et par le couple d'axe $\overrightarrow{W}$. On sait, d'autre part (t. II, n° 123), qu'un tel système est toujours équivalent à un torseur. Or, c'est un torseur qui donne la distribution des vitesses dans un mouvement hélicoïdal (n° 39). Donc :

Théorème. — *Le mouvement le plus général d'un corps solide est, à chaque instant, tangent à un mouvement hélicoïdal.*

46. Composition des mouvements. — Reprenons la chaîne de trièdres T, T_1, T_2, ..., T_n considérée au n° 13. La distribution des vitesses dans le mouvement de T_p par rapport à T_{p-1} est obtenue en vertu du numéro précédent, en prenant le moment résultant d'un certain système de vecteurs S_p. Si nous appliquons alors le théorème de la composition des vitesses, nous voyons que la vitesse d'un point quelconque M de T_n par rapport à T est la somme géométrique des moments résultants de tous les systèmes S_p par rapport à M. Autrement dit, c'est le moment résultant du système

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n.$$

Nous aboutissons donc à une règle très simple.

La distribution des vitesses dans le mouvement résultant s'obtient en ajoutant les systèmes de vecteurs qui donnent la distribution des vitesses dans chacun des mouvements composants.

C'est ainsi que, pour *composer plusieurs rotations*, il suffit de prendre le système formé par leurs vecteurs instantanés.

Quand le système résultant S *est équivalent à un vecteur unique*, le mouvement résultant est *tangent à une rotation unique*. Si S est, au contraire, *équivalent à un couple*, il y a une *translation tangente*, dont le vecteur vitesse est l'axe du couple. Dans tous les autres cas, le mouvement résultant est tangent à un mouvement hélicoïdal.

CHAPITRE IV.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE.

47. Masse. — En Dynamique, s'introduit un élément nouveau : la *masse*. Au point de vue mathématique, nous la définirons simplement de la manière suivante : *la masse d'un point géométrique* M *est un coefficient positif m qui lui est affecté et qui est constant*, par définition ([1]). La masse d'un système S de plusieurs points est la somme des masses de chacun de ces points. Par les procédés du calcul intégral, on peut ensuite définir et calculer la masse d'un milieu continu quelconque, en se donnant la densité en chaque point de ce milieu (*cf.* t. I, n°s 178 à 180).

De la masse, on fait dériver d'autres éléments, tels que le centre de gravité et le moment d'inertie, qui s'introduisent naturellement dans l'étude détaillée de la Dynamique et que nous avons définis et étudiés dans les n°s 181 à 185 du Tome I.

Au point de vue expérimental, la notion de masse peut donner lieu à d'interminables discussions philosophiques. On peut la présenter comme une conséquence naturelle de tel ou tel phénomène mécanique et la définition qui en résulte dépend évidemment du phénomène choisi ([2]).

Nous ne prendrons parti pour aucune école et nous admettrons, ce qui est vérifié dans la pratique, que l'on peut affecter à chaque portion de matière de l'Univers un coefficient positif appelé sa *masse*, tel que tous les phénomènes dynamiques ou statiques expé-

---

([1]) On pourrait tout aussi bien convenir qu'il peut varier suivant certaines lois. C'est ce qu'on fait dans certaines théories de Physique mathématique moderne.

([2]) Cela explique les éternelles discussions auxquelles donne lieu la définition de la masse, chaque auteur attachant naturellement une importance prépondérante au phénomène particulier dont il déduit cet élément.

rimentaux soient qualitativement et quantitativement concordants, aux erreurs d'expérience près, avec la théorie mathématique qu'on peut en faire par le secours de la Mécanique rationnelle. Il suffit alors, pour trouver les masses des différents corps, de se donner une fois pour toutes la masse de l'un d'entre eux (par exemple, d'un morceau de platine, auquel on donne, par convention, la masse 1000) et de lui comparer les masses des autres corps, en utilisant n'importe quel phénomène mécanique. Bien entendu, il y a intérêt à choisir ce dernier parmi les phénomènes d'expérimentation facile et dont les mesures se font avec la plus grande précision. C'est ainsi que, dans la pratique, on utilise le phénomène de la pesanteur, pris sous une forme statique particulière, qui est la *balance*. En Astronomie, au contraire, on mesure les masses des planètes, en utilisant le seul phénomène mécanique dont on dispose, c'est-à-dire l'observation de leurs mouvements (¹).

Il est évidemment impossible de démontrer que, quels que soient les phénomènes utilisés, les mesures de la masse sont toujours concordantes. C'est là une vérité d'ordre expérimental, qui porte le nom d'*axiome de la masse* et qu'on ne peut même songer à vérifier directement. Comme les autres axiomes de la Mécanique, que nous allons rencontrer plus loin, il est vérifié par ses conséquences, c'est-à-dire par la concordance de toute la Mécanique appliquée avec la Mécanique rationnelle (²).

48. Force relative (³). — Soit un point M, de masse m, dont nous considérons le mouvement par rapport à un certain trièdre de référence T. Au temps t, il a un certain vecteur accélération $\overrightarrow{M\gamma}$. Nous appellerons *force relative au trièdre* T, *appliquée au*

(¹) L'unité de masse est, cette fois, la masse d'une des planètes, par exemple, de la Terre ou bien la masse du Soleil. On peut la comparer à la masse du kilogramme-étalon, grâce au principe de la gravitation universelle (expérience de Cavendish).

(²) De même, le physicien qui bâtit une théorie mathématique part souvent de principes dont la vérification directe est impossible (telles les hypothèses atomiques) et se considère comme satisfait quand les conséquences de sa théorie qui peuvent être soumises au contrôle de l'expérimentation se trouvent vérifiées avec une approximation suffisante.

(³) Cette notion est due à M. Painlevé.

point M, *à l'instant t*, le vecteur

(1) $$\vec{f} = m.\vec{M\gamma}.$$

Comme son nom l'indique, cette force dépend essentiellement du choix du trièdre de référence. Si l'on prend un autre trièdre T', animé d'un mouvement quelconque par rapport au premier, nous savons (nº 16) que le vecteur accélération est changé, donc aussi le vecteur force relative. Il y a toutefois un cas où l'accélération et, par suite, la force ne changent pas; c'est celui où le mouvement d'entraînement est une translation rectiligne et uniforme (nº 16). Nous avons donc cette proposition fort importante :

Théorème. — *La force relative appliquée à un point* M *est la même par rapport à deux trièdres de référence animés, l'un par rapport à l'autre, d'une translation rectiligne et uniforme.*

Dans tous les autres cas, la force change en même temps que le trièdre. Si $\vec{f'}$ désigne la force relative à T', on passe de $\vec{f}$ à $\vec{f'}$ par la composition des accélérations (nº 16). On a, en effet,

(2) $$\vec{\gamma} = \vec{\gamma'} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}.$$

En multipliant par m, on en déduit

(3) $$\vec{f'} = \vec{f} + \vec{f_e} + \vec{f_c};$$

en posant

(4) $$\vec{f_e} = -m\vec{\gamma_e}, \qquad \vec{f_c} = -m\vec{\gamma_c}.$$

Ces deux vecteurs correctifs $\vec{f_e}$ et $\vec{f_c}$, qui doivent s'ajouter à l'ancienne force pour donner la nouvelle, portent respectivement les noms de *force d'entraînement* et de *force de Coriolis* ou *force complémentaire*. D'après ce qui a été vu au nº 16, ils dépendent de la position et de la vitesse du point M au temps t, suivant une loi qui est entièrement déterminée quand on connaît le mouvement d'entraînement.

Au point de vue expérimental, *la force relative ne correspond à aucune réalité concrète*. Et il ne saurait en être autrement, puisqu'elle dépend du trièdre de référence, lequel peut toujours être arbitrairement choisi. Elle n'existe pas plus, dans le monde

physique, que le vecteur accélération. C'est une pure abstraction mathématique.

49. Lois de force. — Soit un point M, de masse m, susceptible de prendre toutes espèces de mouvement par rapport au trièdre T. Étant donné l'un quelconque de ces mouvements, nous appellerons *conditions au temps t* la position et le vecteur vitesse du point M. Quand le temps t sera le temps o, ces conditions seront aussi appelées les *conditions initiales*.

Cela posé, à chaque système de conditions au temps t, faisons correspondre un vecteur $\vec{f}$ déterminé, qui sera fonction de ces conditions. Analytiquement, les composantes de $\vec{f}$ suivant les axes du trièdre de référence doivent être des fonctions déterminées des sept variables t, x, y, z, x', y', z', soit

$$(5) \qquad X = f(t, x, y, z, x', y', z'), \qquad Y = g(t, x, \ldots, z'), \qquad Z = h(t, x, \ldots, z').$$

Nous dirons que cette correspondance ou, si l'on veut, les formules (5) définissent une *loi de force* et nous dirons que le point M obéit à cette loi de force s'il est astreint à ne prendre que des mouvements tels qu'à chaque instant la force relative qui lui est appliquée satisfasse à la définition du vecteur $\vec{f}$ ci-dessus, quand on prend comme conditions au temps t la position et le vecteur vitesse que possède effectivement le point M dans le mouvement considéré.

Il revient au même de dire que les seuls mouvements que peut prendre le point M doivent satisfaire aux équations différentielles suivantes, obtenues en projetant (1) sur les axes de référence :

$$(6) \qquad \begin{cases} mx'' = f(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = g(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = h(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

On démontre, en Analyse, qu'un tel système possède une seule solution, pour laquelle x, y, z, x', y', z' prennent des valeurs données à l'avance, pour une valeur également donnée de t. Il revient au même de dire que *lorsqu'un point* M *obéit à une loi de force donnée, son mouvement est entièrement déterminé par la*

connaissance de ses conditions à un temps t quelconque, par exemple, par la connaissance de ses conditions initiales.

Réciproquement, si l'on admet cette propriété, le point M obéit à une loi de force, car si le mouvement est entièrement déterminé par les conditions au temps t, il en est de même, en particulier, du vecteur accélération à cet instant et, par suite, de la force relative [1].

50. Voyons maintenant si les lois de force que nous venons de définir correspondent à une réalité quelconque dans le monde physique. Elles peuvent s'interpréter de la manière suivante : Si un point matériel est placé dans un milieu déterminé, son mouvement par rapport à un trièdre de référence quelconque est entièrement déterminé par la connaissance de ses conditions initiales. C'est là encore une vérité d'ordre expérimental, qu'on ne saurait démontrer et qui s'appelle l'*axiome des conditions initiales*.

On peut d'ailleurs discuter à perte de vue sur sa véritable signification, à cause de l'imprécision même de son énoncé. Qu'appelons-nous, en effet, *milieu déterminé?* A quoi reconnaissons-nous que le milieu change? Souvent, on ne s'en aperçoit précisément qu'au fait que la loi de force est modifiée et, dans ce cas, notre axiome devient un véritable acte de foi.

Sans pénétrer davantage dans ces considérations philosophiques, bornons-nous à faire observer qu'il existe pratiquement des lois de force dans la Nature. Ces lois sont, en général, déterminées expérimentalement par les physiciens. Par exemple, à la surface de la Terre, tous les corps obéissent à la loi de force de la *pesanteur*, qui a été déduite d'une étude expérimentale directe de la chute des corps dans le vide. Pour cette loi, le trièdre de référence est invariablement lié à la Terre. Si l'on choisissait un trièdre de référence invariablement lié à un manège de chevaux de bois, par exemple, la loi ne serait plus la même et perdrait en partie sa simplicité. Connaissant

---

[1] On peut se demander pourquoi nous avons pris comme conditions au temps t la position et la vitesse et non pas simplement, par exemple, la position. Il eût évidemment été possible de définir une loi de force de cette manière restreinte; mais, la restriction n'eût plus été valable avec un autre trièdre de référence, puisqu'un changement de trièdre introduit des forces correctives, qui dépendent à la fois de la position et de la vitesse (n° 48).

le mouvement du manège, il serait toutefois facile de trouver la nouvelle loi, par de simples calculs et sans faire aucune expérience nouvelle (n° 48).

51. Forces absolues [1]. — Soit un point M soumis à une loi de force déterminée $\vec{f}$, par rapport à un trièdre de référence déterminé T. Soit maintenant une deuxième loi de force $\vec{f_1}$, rapportée au même trièdre. Considérons le vecteur $\vec{F} = \vec{f_1} - \vec{f}$. C'est la force qu'il faut ajouter géométriquement à la première loi de force pour obtenir la seconde.

Supposons maintenant que l'on rapporte les forces relatives à un autre trièdre de référence T'. Les lois de force $\vec{f}$ et $\vec{f_1}$ sont modifiées toutes deux; mais, elles le sont de la même manière, puisque nous avons remarqué (n° 48) que la force d'entraînement et la force de Coriolis ne dépendent que des conditions au temps t, suivant une loi entièrement déterminée par la connaissance du mouvement du nouveau trièdre par rapport à l'ancien. Il suit de là que la force F reste la même; elle est indépendante du trièdre de référence. C'est pourquoi nous l'appellerons *force absolue*.

Toute loi de force dépend donc du trièdre de référence; mais, une modification quelconque apportée à cette loi est indépendante de ce trièdre et nous pouvons très bien en parler sans avoir spécifié ce dernier.

52. Voyons maintenant à quoi correspond cette notion dans la Nature.

D'abord, si la loi de force change, c'est que le milieu est modifié; il a subi une perturbation P. L'effet, du point de vue mécanique, de cette perturbation est précisément d'ajouter à la loi de force primitive la force absolue $\vec{F}$. Nous sommes certains (et ceci n'est pas un axiome, mais une vérité mathématique) que cette force absolue est indépendante du choix du trièdre de référence. Elle n'a donc plus le caractère relatif des lois de force considérées au numéro précédent. Elle a, en quelque sorte, *une existence intrinsèque*, *qui est la tra-*

[1] Cette notion est encore due à M. Painlevé.

duction dynamique de la perturbation P. Elle peut être étudiée expérimentalement, à partir d'un trièdre de référence quelconque. La loi de force absolue déduite de cette étude est ensuite valable, quel que soit le trièdre de référence.

Il n'est pas difficile de trouver des exemples de lois de force absolue.

Si l'on étudie la chute des corps dans l'air, on ne trouve pas les mêmes mouvements que dans le vide. La présence de l'air autour d'un projectile doit donc être considérée comme une perturbation. On peut déterminer expérimentalement, avec une précision plus ou moins grande, la loi de force absolue introduite par cette perturbation et cette force absolue est appelée la *résistance de l'air*.

De même, si notre point M est électrisé, le mouvement qu'il prend à la suite de conditions initiales données n'est pas le même quand on le place dans un *champ électrique* ou quand on supprime ce champ. La production de ce dernier est donc encore une perturbation et les physiciens savent déterminer expérimentalement la loi de force absolue correspondante. Et, pour cette détermination, le choix du trièdre de référence est sans importance. Les expériences faites avec un trièdre lié à la Terre sont valables pour un trièdre lié à la Lune [1].

Si je pousse un véhicule, je constate qu'il ne prend pas le même mouvement que si je ne le pousse pas. Les modifications d'ordre physiologique que j'impose à mes muscles constituent donc une perturbation et je pourrais très bien chercher à déterminer expérimentalement la loi de force absolue qui correspond à une contraction déterminée de mon biceps. C'est la *force musculaire*, qui est la seule force dont bien des gens aient la notion.

Si je suspends un corps quelconque à un *ressort*, il ne prend pas les mêmes mouvements que s'il est libre. La déformation du ressort est une perturbation et je puis mesurer expérimentalement la force absolue qui correspond à une déformation donnée.

---

[1] Cela ne veut pas dire que, si l'on recommençait les expériences sur la Lune, on trouverait le même champ, car le seul fait de changer le lieu des expériences est une perturbation et peut, par conséquent, modifier la force absolue. Mais, des expériences faites en un lieu déterminé peuvent être interprétées par rapport à un trièdre de référence lié à la Terre ou lié à la Lune et, dans les deux cas, on trouve la même loi de force comme conséquence de ces expériences.

53. ADDITION DES FORCES ABSOLUES. — Appliquer simultanément au point M plusieurs forces absolues $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ..., $\overrightarrow{F_n}$ sera, par définition, ajouter à la force relative $\overrightarrow{f}$ la somme géométrique

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n}.$$

Au point de vue expérimental, ceci revient à admettre que la production simultanée de plusieurs perturbations se traduit par une force absolue qui est la somme géométrique des forces absolues produites par chaque perturbation agissant séparément. Ceci est encore un axiome, vérifié, comme les autres, par l'ensemble de toute la Mécanique et qu'on appelle quelquefois l'*axiome* ou la *règle du parallélogramme des forces* (¹).

Signalons un cas particulier intéressant; c'est celui où la somme géométrique $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n}$ est nulle. On dit alors que les forces absolues considérées *se font équilibre*. Les perturbations correspondantes se neutralisent et leur production simultanée équivaut, au point de vue dynamique, à leur suppression complète.

C'est en partant de ce point de vue particulier qu'on peut arriver à l'*introduction statique de la notion de force*. On conçoit, en effet, que si l'on a, à sa disposition, une série de forces étalon, produites par des perturbations déterminées, telles que les déformations d'un ressort (dynamomètre), on pourra toujours, au moyen de l'une d'elles, équilibrer n'importe quelle autre force, produite par une perturbation quelconque, telle qu'une contraction musculaire et qui sera, par définition, égale et opposée à la force étalon.

C'est même par ce procédé statique qu'on mesure généralement les forces dans la pratique, et cela explique pourquoi beaucoup de gens ne conçoivent pas qu'on puisse en donner une autre définition. La notion vulgaire de force se réduit généralement à un souvenir de

---

(¹) On en a parfois donné une soi-disant démonstration dans des livres de Statique élémentaire. Mais on ne faisait, en réalité, que remplacer l'axiome par un ou plusieurs autres, paraissant peut-être un peu plus intuitifs, mais tout aussi contestables du point de vue de la pure logique. Il est d'ailleurs absurde de vouloir démontrer, par des syllogismes, une vérité d'ordre expérimental. On ne peut que la vérifier par des mesures physiques, soit directement, soit par l'intermédiaire de ses conséquences.

contraction musculaire ayant pour effet de comprimer ou d'allonger un ressort ou d'équilibrer, par rapport à la Terre, la force relative de pesanteur (soulèvement d'un poids).

Quand on définit la force statiquement, outre les axiomes que comporte cette définition dans la Statique même, on est obligé d'en admettre de nouveaux au moment où l'on introduit la force en Dynamique. Le premier est $\vec{f} = m.\vec{\gamma}$ et il porte alors le nom de *principe de l'inertie* (¹). Si l'on regarde bien, on trouve évidemment que les axiomes sont les mêmes dans les deux méthodes d'exposition. Elles ont toutes deux le même degré de rigueur et le même caractère expérimental, lequel ne doit jamais être perdu de vue. Elles ne peuvent différer que par la satisfaction plus ou moins grande qu'elles apportent à l'esprit par leur ordonnancement. Il nous a paru préférable de suivre la marche déductive qui consiste à donner, d'un seul bloc, tous les axiomes de la Dynamique, dont la Statique apparaît ensuite comme un cas particulier. Mais, il est évidemment permis d'avoir une opinion contraire.

54. Forces de liaison; réactions. — Imaginons un point (ou un système de points) soumis à une certaine loi de force, par rapport au trièdre T. Supposons maintenant qu'on lui impose une ou plusieurs *liaisons*, ce qui veut dire que le point (ou certains points du système) ne peut pas prendre n'importe quelle position ou n'importe quelle vitesse par rapport à T. Cela modifie évidemment la nature des mouvements qui peuvent prendre naissance, à la suite de conditions initiales données; par suite, cela modifie aussi la loi de force. A la force relative donnée (ou à la force relative appliquée à chaque point du système), on doit ajouter une certaine force absolue F, pour que la nouvelle loi de force donne des mouvements compatibles avec les liaisons. Cette force F est appelée *force de liaison*.

Dans la pratique, les liaisons sont toujours réalisées matériellement par des contacts. Elles portent alors plus spécialement le nom de *réactions*.

Par exemple, les mouvements que prend une bille sur un billard

(¹) Il est vrai que les gens qui veulent tout démontrer arrivent aussi à démontrer cette formule. Inutile de dire qu'ils ne font que déplacer la difficulté.

ne sont pas les mêmes que si le billard n'existait pas. Le contact du tapis doit donc être considéré comme une perturbation, donnant naissance à une force absolue, qui est la réaction du tapis sur la bille. De même, un projectile ne prend pas les mêmes mouvements dans l'air et dans le vide. Le contact des molécules d'air doit donc être considéré comme une perturbation, donnant naissance à une force absolue, qui est la réaction de ces molécules sur le projectile et dont l'ensemble est appelé *résistance de l'air*.

Réciproquement, la bille exerce une réaction sur le tapis (elle le déforme un peu) et le projectile sur les molécules d'air (il leur communique des mouvements qu'elles n'auraient pas pris, s'il n'y avait pas eu de projectile). Ici, se présente un nouvel axiome :

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — *Les réactions exercées l'un sur l'autre par deux points matériels en contact* (¹) *sont deux vecteurs opposés.*

55. Problème général de la dynamique. — Nous avons terminé maintenant l'exposé des principes fondamentaux de la Dynamique et nous allons pouvoir aborder le développement de leurs diverses conséquences théoriques et pratiques.

Avant d'entrer dans le détail de ce développement, nous terminerons ce Chapitre en disant, en quelques mots, en quoi consiste le problème que se propose généralement de résoudre la Dynamique.

Étant donné un point de masse connue, on se propose de trouver le mouvement qu'il doit prendre, par rapport à un trièdre de référence déterminé, sous l'action d'une loi de force (relative à ce même trièdre) *donnée et avec des conditions initiales données.*

Le même problème peut se poser pour un système de plusieurs points. Sa résolution exige l'intégration d'un système différentiel et la détermination ultérieure des constantes d'intégration. Cela est, en général, un problème fort compliqué et devant lequel l'Analyse se trouve bien souvent impuissante. Quand on ne sait pas intégrer par

(¹) On pourrait entamer des discussions sur la signification précise de ce contact et sur la distance à partir de laquelle la réaction devient appréciable. Cette distance est très grande pour les astres, très faible pour les molécules. Dans la pratique de la Mécanique appliquée, cette difficulté ne se pose pas et l'on sait toujours reconnaître que deux corps se touchent ou ne se touchent pas.

les fonctions connues, on cherche à utiliser des méthodes d'approximation (*cf.* t. I, n° 186); mais cela peut donner lieu à des calculs numériques fort longs.

56. On peut aussi se poser le problème inverse : *Trouver la force, connaissant le mouvement.* Sous cette forme, la question ne présente aucune difficulté, puisqu'elle revient à calculer le vecteur accélération, ce qui se fait par de simples dérivations. Dans la pratique, le problème se pose un peu différemment. Il s'agit, en réalité, de déterminer la loi de force (par rapport à un trièdre de référence qu'on peut choisir comme on veut) correspondant à des conditions physiques données. Autrement dit, il faut étudier comment varie la force relative en fonction des conditions au temps t. C'est là un véritable problème de Physique expérimentale, qui se résout généralement sous la forme de tableaux de nombres ou de graphiques. Le rôle du mathématicien y est à peu près nul et ne peut guère consister qu'à essayer d'interpréter les résultats numériques par des formules empiriques, ce que les physiciens savent, en général, mieux faire que lui, parce qu'ils en ont davantage l'habitude. Ceci explique pourquoi ce problème inverse est, en général, à peine énoncé dans les Cours de Mécanique rationnelle.

CHAPITRE V.

DYNAMIQUE DU POINT.

57. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT. — Soit un point M, de masse m, soumis à une loi de force donnée par rapport à un trièdre de référence déterminé $Oxyz$. Cette loi de force peut être donnée soit sous forme d'une force unique (qui est nécessairement une force relative), soit sous forme de plusieurs forces appliquées simultanément au point M, l'une étant une force relative et les autres étant des forces absolues. Dans tous les cas, on doit additionner géométriquement toutes les forces données, pour obtenir la force relative totale, qui satisfait à l'égalité fondamentale

$$\vec{f} = m.\vec{\gamma}. \tag{1}$$

Le vecteur $\vec{f}$ est connu en fonction des conditions au temps t.

On obtient les trois équations différentielles du mouvement, en projetant (1) *sur trois axes quelconques formant un véritable trièdre* et pouvant indifféremment être fixes ou mobiles.

Le plus simple consiste généralement à projeter sur les axes du trièdre de référence. On obtient alors les équations suivantes, où X, Y, Z désignent les projections de la force $\vec{f}$:

$$mx'' = X, \qquad my'' = Y, \qquad mz'' = Z. \tag{2}$$

Elles constituent un système différentiel du sixième ordre, dont l'intégration introduirait six constantes arbitraires, lesquelles se détermineraient au moyen des conditions initiales.

On démontre et nous vérifierons toutes les fois que nous saurons intégrer que cette détermination des constantes peut toujours se faire et d'une seule manière (sauf dans quelques cas singuliers, dont

nous ne pouvons parler dans cet Ouvrage). Autrement dit, *il y a un mouvement et un seul qui correspond à des conditions initiales données.* Si on le découvre par hasard (ou bien en se guidant, comme il arrive quelquefois, par des considérations de symétrie), il n'est pas nécessaire de savoir intégrer le système (2) pour affirmer que la solution trouvée donne le véritable mouvement du point M, puisque la solution est unique.

58. Équations intrinsèques. — Au lieu de projeter sur les axes du trièdre de référence, projetons sur les axes de Frenet de la trajectoire. Si nous désignons par f_T, f_N, f_B les projections de $\overrightarrow{f}$ sur la tangente, la normale principale et la binormale, nous obtenons, en nous reportant au n° 8,

$$(3) \qquad m\frac{dv}{dt}=f_T, \qquad m\frac{v^2}{R}=f_N, \qquad f_B=0,$$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire.

Ces équations s'appellent les *équations intrinsèques* du mouvement.

Si l'on sait, par exemple, que la force est constamment normale à la trajectoire, on peut en conclure que le mouvement est uniforme.

59. Quantité de mouvement et moment cinétique. — Soit $\overrightarrow{MV}$ le vecteur vitesse du point M au temps t. On appelle vecteur *quantité de mouvement* le vecteur $\overrightarrow{MQ} = m.\overrightarrow{MV}$. Il se définit au moyen de la vitesse comme la force au moyen de l'accélération. On a évidemment le théorème suivant :

Théorème I. — *La force est la dérivée géométrique de la quantité de mouvement.*

Si l'on intègre (2) entre deux époques quelconques t_0 et t_1, on obtient les composantes de l'*accroissement géométrique de la quantité de mouvement :*

$$mx'_1 - mx'_0 = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt,$$

$$my'_1 - my'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt,$$

$$mz'_1 - mz'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

Ce vecteur est appelé l'*impulsion* de la force pendant l'intervalle de temps considéré.

On appelle *moment cinétique* par rapport au point *fixe* O le vecteur

$$(4)\qquad \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MQ_{\cdot}O}.$$

C'est le *moment de la quantité de mouvement.*

Ses projections sur les axes du trièdre de référence sont (t. II, n° 107)

$$(5)\qquad K_x = m(yz' - zy'),\quad K_y = m(zx' - xz'),\quad K_z = m(xy' - yx').$$

Signalons que K_z, par exemple, est proportionnel à la vitesse aréolaire sur le plan des xy (n° 7). On peut en conclure le théorème suivant :

Théorème II. — *Si le moment de la quantité de mouvement par rapport à une droite fixe est constant, le mouvement obéit à la loi des aires sur tout plan perpendiculaire à cette droite, le centre des aires étant le point de rencontre de la droite et du plan.*

Dérivons les formules (5) par rapport au temps :

$$(6)\qquad K'_x = m(yz'' - zy''),\quad K'_y = m(zx'' - xz''),\quad K'_z = m(xy'' - yx'').$$

Or, les seconds membres sont les moments de la force par rapport aux axes de coordonnées. On a donc le théorème très important :

Théorème III. — *Le moment de la force par rapport à un point fixe O est la dérivée géométrique par rapport au temps du moment cinétique par rapport à ce point.*

On peut dire aussi qu'il est équipollent au vecteur vitesse du point K, extrémité de ce moment cinétique, ou bien encore que *le moment de la force par rapport à une droite fixe est la dérivée algébrique, par rapport au temps, du moment de la quantité de mouvement par rapport à cette droite.*

En rapprochant ce dernier énoncé du théorème II ci-dessus, on en déduit le suivant :

Théorème IV. — *Si la force rencontre une droite fixe, on a la loi des aires sur le plan perpendiculaire.*

60. TRAVAIL. — Soit le point M, auquel est appliquée la force $\overrightarrow{F}$. Donnons-lui un déplacement infiniment petit MM′. *On appelle travail élémentaire de* $\overrightarrow{F}$ *pour le déplacement élémentaire* MM′ *le produit scalaire* (t. II, n° 104) *des deux vecteurs* $\overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$, soit

$$(7) \qquad d\mathfrak{T} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{MM'}.$$

Si X, Y, Z sont les projections de la force sur les axes rectangulaires du trièdre de référence et si dx, dy, dz sont les projections de $\overrightarrow{MM'}$, on a (t. II, n° 104)

$$(8) \qquad d\mathfrak{T} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

En vertu de la distributivité de la multiplication scalaire, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées au point* M *est la somme algébrique des travaux des composantes.*

Si le point M subit un déplacement fini M_0M_1, on appelle *travail fini* de la force F pour ce déplacement l'intégrale curviligne (t. I, n° 178)

$$(9) \qquad \mathfrak{T} = \int_{(M_0M_1)} d\mathfrak{T} = \int_{(M_0M_1)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Si t désigne le paramètre qui fixe la position de M sur l'arc de courbe M_0M_1 (ce sera, par exemple, le temps), on a

$$(10) \qquad \mathfrak{T} = \int_{t_0}^{t_1} (X x' + Y y' + Z z')\,dt,$$

en appelant x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Le théorème énoncé ci-dessus s'applique évidemment dans le cas d'un travail fini.

61. Imaginons qu'*à chaque point* M(x, y, z) *de l'espace, on fasse correspondre une force* $\overrightarrow{F}$ *déterminée appliquée en ce point.* Une telle correspondance définit ce qu'on appelle un *champ de*

forces. Les composantes X, Y, Z de $\vec{F}$ sont des fonctions déterminées des trois variables x, y, z.

On appelle *ligne de force* du champ toute ligne qui est *tangente en chacun de ses points à la force* F *correspondante*. Les paramètres directeurs dx, dy, dz de la tangente doivent être proportionnels à X, Y, Z; il en résulte que les équations différentielles des lignes de forces sont

$$(11)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

On dit que *le champ dérive d'une fonction de forces ou d'un potentiel lorsque le travail élémentaire* (8) *est une différentielle totale exacte* (t. I, n° 141). La fonction $U(x, y, z)$, dont $d\mathcal{E}$ est la différentielle ([1]), s'appelle la *fonction de forces* et $-U$ s'appelle le *potentiel*. On a évidemment

$$(12)\qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Le champ étant donné par les composantes X, Y, Z en fonction de x, y, z, pour qu'il y ait potentiel, il faut et il suffit que l'on ait (t. I, n° 141)

$$(13)\qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Lorsque le champ est défini par un procédé géométrique quelconque, on peut reconnaître qu'il dérive d'une fonction de forces en calculant ses composantes et écrivant les conditions (13). Mais il est souvent plus simple de *former directement l'expression du travail élémentaire*, ce qu'on peut faire fréquemment sans calculer les composantes; *on regarde ensuite si cette expression est une différentielle exacte*.

On appelle *surfaces de niveau* ou *surfaces équipotentielles* les surfaces

$$(14)\qquad U = \text{const.}$$

Les paramètres directeurs de la normale en $M(x, y, z)$ à la surface de niveau qui passe par ce point sont (t. II, n° 210) $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$,

---

([1]) Cette fonction n'est définie qu'à une constante additive près (t. I, n° 141).

c'est-à-dire, d'après (12), X, Y, Z. Il en résulte que *le champ est, en chaque point, normal à la surface de niveau qui passe par ce point*. On en conclut aussi que *les lignes de force sont les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles*.

Si l'on applique la formule (9) dans le cas où il y a une fonction de forces U, on a

$$(15)\qquad \mathfrak{T} = \int_{(M_0M_1)} dU = \int_{t_0}^{t_1} U'\,dt = U(t_1) - U(t_0) = U_{M_1} - U_{M_0}.$$

Autrement dit, *le travail du champ quand* M *va de* M_0 *en* M_1 *est égal à l'accroissement algébrique de la fonction de forces* (ou à la diminution algébrique du potentiel). Il est *indépendant du chemin parcouru;* il dépend seulement du point de départ et du point d'arrivée ou, plus exactement, des surfaces de niveau qui passent par ces points.

Si l'on convient de donner la valeur zéro au potentiel en M_0 (*cf.* note de la page 66), la formule (15) nous montre que le potentiel en un point quelconque M est le travail du champ quand ce point va en M_0. C'est ainsi que le potentiel électrostatique est le travail du champ électrique quand le point M va à l'infini.

L'application de la formule (15) demande quelques précautions *lorsque la fonction* U *n'est pas uniforme* (t. I, n° 73), c'est-à-dire lorsqu'elle admet plusieurs déterminations en chaque point de l'espace. Pour évaluer le travail relatif à un chemin déterminé entre M_0 et M_1, on part de M_0 avec une détermination quelconque de U; puis, on suit l'accroissement continu de cette détermination le long du chemin considéré et l'accroissement final, quand on arrive en M_1, est le travail cherché.

Ce travail n'est pas nécessairement le même pour deux chemins différents ayant la même origine et la même extrémité. Cela tient à ce qu'on peut décrire des circuits fermés donnant lieu à un travail non nul et égal à la différence des deux déterminations de U à l'arrivée et au départ. Si, par exemple, le circuit $M_0NM_1PM_0$ donne le travail A, on a

$$\mathfrak{T}(M_0NM_1) = A - \mathfrak{T}(M_1PM_0) = A + \mathfrak{T}(M_0PM_1).$$

62. Nous allons maintenant passer en revue les exemples qu'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique de champs de force

dérivant d'un potentiel. On peut les résumer tous en disant que ce sont des combinaisons d'*attractions ou répulsions par un plan, une droite ou un point, dont chacune est uniquement fonction de la distance du point* M *à l'élément attractif ou répulsif.*

I. *Attraction ou répulsion par un plan.* — Prenons le plan pour plan des xy. La force $\overrightarrow{F}$ est perpendiculaire à ce plan, donc parallèle à Oz. Sa projection Z sur cet axe est une fonction de la cote z de M. Le travail élémentaire

$$d\varpi = Z\,dz \tag{16}$$

est la différentielle de la fonction

$$U = \int Z\,dz, \tag{17}$$

qui est la fonction de forces.

II. *Attraction ou répulsion par une droite.* — Soit Oz cette droite et soit $r = PM$ sa distance au point M. La force $\overrightarrow{F}$ est dirigée suivant PM et ne dépend que de r. Soit $f(r)$ sa mesure algébrique suivant la demi-droite qui va de P vers M, de sorte que l'on a une répulsion ou une attraction suivant que $f(r)$ est positif ou négatif. Évaluons le travail élémentaire pour le déplacement infiniment petit MM′. Nous multiplions $f(r)$ par la projection de MM′ sur PM. Or cette projection est un infiniment petit équivalent à dr (*cf.* t. I, n° 173), en appelant $r + dr$ la distance de M′ à Oz. On a donc

$$d\varpi = f(r)\,dr, \tag{18}$$

ce qui est la différentielle de la fonction de forces

$$U = \int f(r)\,dr. \tag{19}$$

III. *Attraction ou répulsion par un point.* — Soit O le centre de répulsion ou d'attraction et soit $OM = r$. La force $\overrightarrow{F}$ est dirigée suivant OM; soit $f(r)$ sa mesure algébrique suivant cette demi-droite, de sorte que l'on a encore une attraction ou une répulsion suivant que $f(r)$ est négatif ou positif. En raisonnant comme tout à l'heure, on voit que le travail élémentaire est encore donné par la formule (18) et, par suite, la fonction de forces par la formule (19).

Si l'on remarque que, dans le premier cas, z est aussi la distance du plan attractif ou répulsif au point M, on voit qu'on peut réunir les trois cas en un seul, la fonction de forces étant toujours donnée par la formule (19).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier à titre d'exercice, que l'on a bien les formules (12), dans chacun des trois cas.

63. On peut maintenant obtenir des fonctions de forces plus compliquées en additionnant plusieurs fonctions de la nature précédente. On a, en effet, le théorème suivant :

Théorème. — *Si plusieurs forces appliquées au point* M *dérivent chacune d'un potentiel, leur résultante dérive aussi d'un potentiel, qui est la somme algébrique des potentiels des forces composantes.*

Cela résulte du théorème du n° 60 et de ce que la différentielle d'une somme de plusieurs fonctions est la somme des différentielles de ces fonctions. On le voit tout aussi facilement en appliquant les formules (12) à chaque composante et en ajoutant, conformément au théorème des projections.

64. Théorème des forces vives. — Revenons maintenant au mouvement du point M. Évaluons le travail élémentaire de la force relative totale f, pendant le temps infiniment petit dt. Le déplacement élémentaire a pour composantes

$$(20) \qquad dx = x'\,dt, \qquad dy = y'\,dt, \qquad dz = z'\,dt.$$

Si, d'autre part, nous appliquons les formules (2), la formule (8) nous donne

$$d\varpi = m\,dt(x''x' + y''y' + z''z').$$

Or la parenthèse est la demi-dérivée de $x'^2 + y'^2 + z'^2$, c'est-à-dire de v^2. On en conclut que

$$(21) \qquad d\varpi = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Le produit mv^2 est appelé *force vive* du point M et la moitié de ce produit est appelée *énergie cinétique*. La formule (21) peut alors donner lieu à l'énoncé suivant :

Théorème des forces vives. — *Le travail élémentaire de la force*

relative appliquée au point M *pendant le temps dt est égal à la différentielle de la demi-force vive ou énergie cinétique de ce point.*

Quand une force F est appliquée au point mobile M, on appelle *puissance de cette force au temps t* le quotient de son travail élémentaire par le temps dt pendant lequel se produit ce travail ([1]). Si l'on divise les deux membres de (21) par dt, le théorème des forces vives peut alors s'énoncer de la manière suivante :

La puissance au temps t de la force relative totale appliquée au point M *est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point.*

Si l'on intègre (21) entre deux époques quelconques, on obtient encore une nouvelle forme du théorème des forces vives :

Le travail de la force relative pendant un intervalle de temps quelconque est égal à l'accroissement algébrique de l'énergie cinétique pendant cet intervalle.

65. *Cas où il y a un potentiel.* — Supposons que la force relative dérive d'une fonction de forces U. Nous savons que, pour un déplacement quelconque, le travail élémentaire est la différentielle dU. Pendant le mouvement, cette différentielle est donc constamment égale à la différentielle de l'énergie cinétique. Il en résulte que ces deux fonctions du temps ne diffèrent que par une constante, ce qui s'écrit

$$(22) \qquad \frac{1}{2} mv^2 = U + h,$$

h étant une constante, qu'on appelle ordinairement la *constante des forces vives* et qu'on peut déterminer au moyen des conditions initiales.

Le potentiel — U s'appelle aussi l'*énergie potentielle* du point M.

([1]) Le travail, depuis le temps o jusqu'au temps t, est une fonction de t. La puissance est la dérivée de cette fonction. Inversement, le travail de o à t s'obtient en intégrant la puissance entre ces deux limites. Dans le cas particulier où la puissance est constante, le travail est proportionnel au temps et la puissance est alors le travail par unité de temps.

Si on le fait passer dans le premier membre de (22), on peut dire que *la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du point* M *est constante.*

66. Principaux cas d'intégration des équations de la dynamique du point. — Maintenant que nous avons vu les différentes manières d'écrire les équations du mouvement d'un point soumis à une loi de forces donnée, ainsi que les importantes conséquences qu'on en peut déduire par la considération du moment cinétique et de la force vive, nous allons passer en revue les principaux cas, présentant quelque généralité, où l'on sait intégrer ces équations, en totalité ou en partie.

Mouvement rectiligne. — Dans certains problèmes, le point M est astreint à se mouvoir sur une droite fixe. Ou bien on peut démontrer *a priori* (par exemple, par des considérations de symétrie) que la trajectoire est certainement une droite. Il est alors naturel de prendre cette droite comme axe des x et le mouvement ne dépend plus que d'une seule équation différentielle du second ordre en x. Nous avons indiqué, dans le Tome I (nos 195 et suiv.), les cas élémentaires d'intégration ou d'abaissement de l'ordre d'une telle équation. Il est facile d'en donner l'interprétation dynamique.

Si l'on se reporte, par exemple, au n° 195 précité, on voit que *la détermination du mouvement se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre dans les cas suivants :*

I. *La force ne dépend pas de la position du point* M. — On prend alors la vitesse comme inconnue.

Si, en outre, la force est indépendante du temps, les variables se séparent (t. I, n° 188) et l'on peut intégrer par quadratures.

II. *La force ne dépend pas du temps.* — On prend encore la vitesse comme fonction inconnue, mais x pour variable indépendante.

Si, en outre, la force ne dépend pas de la vitesse, autrement dit, si elle ne dépend que de la position du point M, les variables se séparent et l'on peut intégrer par quadratures. Cela résulte d'ailleurs, en toute évidence, du théorème des forces vives. On a, en effet, une

fonction de forces $U = \int X\,dx$. L'intégrale des forces vives (22) nous donne alors

$$(23) \qquad x' = \sqrt{\frac{2}{m}(U+h)}, \qquad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(U+h)}}.$$

67. Intégrales premières. — Revenons au cas du mouvement général dans l'espace. On dit qu'on obtient une *intégrale première* lorsqu'on trouve une équation de la forme

$$(24) \qquad F(t, x, y, z, x', y', z') = \text{const.},$$

qui est vérifiée par tout mouvement obéissant à la loi de force donnée, la constante pouvant, bien entendu, varier suivant les conditions initiales, qui permettent d'ailleurs de la calculer. Autrement dit, l'équation (24) doit être une conséquence des équations (2) et peut remplacer l'une d'elles. Elle a l'avantage de ne plus renfermer de dérivées secondes, de sorte que l'obtention d'une intégrale première est toujours un pas vers l'intégration totale du système.

Sans nous préoccuper davantage de la recherche et de l'utilisation de ces intégrales, citons quelques exemples simples et qui se présentent fréquemment dans la pratique.

I. *La force est constamment perpendiculaire à une droite fixe.* — Si l'on prend cette force comme axe des x, on a $x'' = 0$; donc

$$(25) \qquad x = at + b,$$

a et b désignant deux constantes. Autrement dit, *la projection du mouvement sur l'axe des x est un mouvement uniforme.* L'équation (25) équivaut à deux intégrales premières, en ce sens qu'elle contient deux constantes d'intégration.

II. *La force rencontre une droite fixe.* — Si l'on prend cette droite pour axe des z, on sait que *la vitesse aréolaire sur le plan des xy est constante* (n° 59) ; cela donne l'intégrale première

$$(26) \qquad xy' - yx' = \text{const.}$$

Il est souvent avantageux, dans ce cas, de prendre des coordonnées

semi-polaires; l'équation (26) s'écrit alors (n° 7)

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \tag{27}$$

III. *Il y a potentiel.* — On a *l'intégrale des forces vives* (22).

Quand on se trouve simultanément dans plusieurs des cas précédents, on peut écrire plusieurs intégrales premières et, par leur combinaison, on peut quelquefois arriver à intégrer complètement les équations du mouvement.

68. Forces centrales. — Voici un cas très important où la recherche du mouvement se trouve tout de suite considérablement simplifiée. C'est le cas où *la force passe par un point fixe* ou, comme on dit, *est centrale*.

Soit O le point fixe. Le moment de la force par rapport à ce point est nul; donc le moment cinétique OK est constant en grandeur et en direction ou, si l'on veut, le point K est fixe, puisque sa vitesse est constamment nulle (n° 59). On en conclut d'abord que la trajectoire se trouve dans le plan mené par O perpendiculairement à OK, puisque OK est perpendiculaire au plan OMV, donc à OM. En outre, on a la loi des aires. En raison de leur importance pratique, énonçons ces résultats sous forme de théorème :

Théorème. — *Quand un point* M *est soumis à une force centrale de centre* O, *la trajectoire est plane et dans un plan passant par* O; *de plus, elle est décrite suivant la loi des aires, le centre des aires étant le point fixe* O.

Pour déterminer le plan du mouvement, il suffit de remarquer qu'il doit contenir le vecteur vitesse initiale M_0V_0. Comme il doit, en outre, passer par O, il est ainsi complètement déterminé. Il y a exception seulement dans le *cas où* M_0V_0 *passe par* O. Dans ce cas, le moment cimétique OK est nul au temps 0; donc, il est constamment nul et l'on en conclut que la vitesse doit constamment passer par O; ceci ne peut arriver que si *la trajectoire est une droite* passant par O [1]. On est ramené au cas du mouvement rectiligne (n° 66).

---

[1] Il n'existe pas de ligne courbe dont toutes les tangentes passent par un point fixe, car si la tangente varie, elle engendre un cône; son point limite est constam-

Ce cas particulier étant écarté, pour achever la détermination du mouvement, il est généralement avantageux [1] de prendre des coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire. On a immédiatement une première équation très simple, qui est l'*intégrale des aires :*

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C. \tag{28}$$

Pour avoir la seconde, on peut projeter l'égalité fondamentale (1) sur le rayon vecteur [2], en se servant de la première formule (19) du n° 10. On peut aussi, si l'on a oublié cette formule, employer le *théorème des forces vives*, qui donne immédiatement l'équation

$$f\,dr = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right). \tag{29}$$

On se rappelle, d'autre part, la formule (n° 10)

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2}. \tag{30}$$

Le théorème des forces vives est particulièrement indiqué lorsqu'il y a potentiel. Supposons, par exemple, que $\vec{f}$ ne dépende que de r. On a alors une fonction de forces U, que l'on commence par calculer au moyen d'une quadrature (n° 62). On écrit ensuite l'*intégrale des forces vives*

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \frac{2}{m}(U + h)\,dt^2. \tag{31}$$

Il est alors très facile d'intégrer le système (28), (31) *par quadratures*. Nous pouvons indifféremment éliminer dt ou $d\theta$. Éliminons, par exemple, dt, ce qui nous conduira à l'*équation différentielle de la trajectoire*. Sans faire aucun calcul, nous voyons que cette équation ne renfermera pas explicitement θ et, par conséquent, on pourra séparer les variables (t. I, n° 188). Effectivement, en tirant dt

---

ment le point fixe et ne peut décrire une courbe. On peut remarquer aussi que la constante de l'équation (27) est nulle : donc $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $\theta = \text{const.}$

[1] Le seul cas où il n'en est pas ainsi est celui où la force est proportionnelle à la distance (n° 87).

[2] Si l'on projetait sur la perpendiculaire à ce rayon vecteur, on retrouverait (28).

de (28) et portant dans (31), on trouve

$$(32) \qquad \theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{-1 + \frac{2r^2(U+h)}{mC^2}}}.$$

Ayant r en fonction de θ ou θ en fonction de r, l'équation (28) donne ensuite t en fonction de la même variable, ce qui détermine la loi du mouvement sur la trajectoire

69. *Formule de Binet.* — Cette formule donne la force f, quand on connaît l'équation polaire de la trajectoire. Nous allons la déduire de (29). Calculons, au préalable v^2, en nous servant de (28), pour éliminer le temps :

$$(33) \qquad v^2 = C^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{r'^2}{r^4}\right) = C^2(u^2 - u'^2),$$

en posant $u = \frac{1}{r}$ et désignant par des accents les dérivées par rapport à θ. La formule (29) nous donne maintenant

$$f = \frac{mC^2}{2}\frac{d(u^2+u'^2)}{dr} = mC^2\left(u\frac{du}{dr} + u'\frac{du'}{dr}\right).$$

Or,

$$\frac{du}{dr} = -u^2, \qquad \frac{du'}{dr} = u''\frac{d\theta}{dr} = u''\frac{1}{r'} = u''\left(\frac{-u^2}{u'}\right).$$

Portant plus haut, il vient

$$(34) \qquad f = -mC^2u^2(u + u'').$$

Telle est la *formule de Binet.*

Elle est généralement employée pour déterminer la loi de force centrale qui permet de faire parcourir *librement* une courbe donnée, avec une vitesse aréolaire donnée.

On peut aussi chercher à l'utiliser pour trouver la trajectoire, quand on connaît la loi de force, c'est-à-dire pour résoudre le problème ordinaire de la Dynamique. Par exemple, si f est une fonction connue de r, donc de u, l'équation (34) s'intègre par quadratures. Mais, outre que la formule de Binet est assez difficile à retenir exactement, il est généralement plus simple d'utiliser directement l'intégrale des aires et l'intégrale des forces vives, comme nous l'avons exposé au numéro précédent. La formule de Binet n'est avantageuse que dans le cas où la force est inversement proportionnelle au carré de la distance (n° 93), parce qu'elle conduit à une équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégration est immédiate.

70. Point gêné. — Le point M est dit *gêné* ou soumis à des liai-

sons (n° 54) lorsqu'il est assujetti à rester constamment sur une courbe C ou une surface S donnée. Cette courbe ou cette surface peut être fixe ou mobile. Le second cas peut évidemment se ramener au premier, par un changement de trièdre de référence. Mais, c'est là une opération généralement compliquée (n° 48).

La courbe ou la surface exerce sur le point M une réaction $\vec{R}$, dont les trois composantes R_x, R_y, R_z sont inconnues. Comme la position de M dépend d'un paramètre sur C et de deux paramètres sur S, on voit qu'on a, en tout, quatre ou cinq fonctions inconnues. Or, la Mécanique rationnelle ne nous donne que trois équations (n° 57); il nous en manque donc une ou deux, suivant le cas. La détermination du mouvement d'un point gêné, soumis à une loi de force donnée, apparaît donc comme un problème insoluble par le seul secours de la Mécanique rationnelle. Pour le résoudre, il nous faut *chercher des équations supplémentaires* et ces équations ne peuvent nous être fournies que par une étude *expérimentale* des réactions. Cette étude a été faite, dans des cas simples, avec une précision assez grossière. Elle a conduit aux lois suivantes. Deux cas sont considérés.

71. *Premier cas : il n'y a pas frottement* [1]. — Ce cas, purement théorique, mais dont on peut quelquefois s'approcher avec une assez grande exactitude, consiste à admettre que *la réaction est normale* à la courbe C ou à la surface S. Cela se traduit par une équation supplémentaire dans le premier cas et par deux équations dans le second cas. De toutes façons, le problème est, cette fois, *entièrement déterminé*.

On peut éliminer automatiquement la réaction en *projetant l'égalité fondamentale* (1) *sur la tangente à la courbe* C *ou sur deux tangentes distinctes de* S. On obtient ainsi autant d'équations que l'on a d'inconnues et l'on peut, par conséquent, déterminer le mouvement. Si l'on veut ensuite la réaction, il suffit de remarquer que l'on connaît l'accélération, donc la force relative totale; en en retranchant la force donnée, il reste la réaction. Bien entendu, cette soustraction géométrique s'opère analytiquement par projection sur les axes du trièdre de référence ou bien sur deux normales distinctes de C ou sur la normale de S.

---

[1] On dit aussi que la courbe C ou la surface S est *parfaitement polie*.

Dans le cas où la courbe C ou la surface S est fixe, ou, comme on dit, *lorsque les liaisons sont indépendantes du temps*, *on peut appliquer le théorème des forces vives, en négligeant la réaction* dans l'évaluation du travail élémentaire. En effet, le déplacement élémentaire du point M est tangent à C ou à S ; il est donc normal à la réaction et le travail de cette dernière est nul.

Cela donne un moyen simple d'avoir une équation du mouvement et cette équation est même suffisante dans le cas où la liaison est une courbe.

Mais, il faut bien prendre garde de ne pas employer ce procédé (à moins d'introduire le travail de la réaction) lorsque C ou S est mobile. Dans ce cas, en effet, la vitesse absolue du point M est la somme géométrique de sa vitesse relative, qui est tangente à C ou S et de sa vitesse d'entraînement, qui n'est pas tangente, en général. Il s'ensuit que le déplacement élémentaire absolu, qui doit entrer en ligne de compte pour l'évaluation du travail, n'est pas perpendiculaire à la réaction, de sorte que le travail de cette dernière n'est pas nul. On commettrait donc une faute grossière en le négligeant dans l'application du théorème des forces vives.

Lorsque le point M est assujetti à rester sur une courbe fixe, on peut remarquer que l'on connaît la trajectoire, qui est cette courbe elle-même. Il peut être alors assez commode d'employer les équations intrinsèques (n° 58). Si l'on désigne par F_T, F_N, F_B les projections de la force active donnée sur la tangente, la normale principale et la binormale et par R_N, R_B les projections de la réaction sur les deux dernières droites, on a

$$(35)\qquad m\frac{dv}{dt} = F_T, \qquad m\frac{v^2}{R} = F_N + R_N, \qquad F_B + R_B = 0.$$

La première détermine le mouvement ; les deux autres donnent les composantes de la réaction.

72. *Deuxième cas : il y a frottement.* — On admet alors que la réaction obéit aux lois suivantes, dites *lois du frottement de glissement :*

1° *La composante tangentielle de la réaction ou force de frot-*

tement Φ a constamment la direction opposée à la vitesse de glissement :

2° Son rapport avec la composante normale est constant et s'appelle le coefficient de frottement.

Quelques explications sont nécessaires à ce sujet.

D'abord, la vitesse de glissement est la vitesse du point M par rapport à C ou à S; ce n'est donc sa vitesse absolue que si C ou S est fixe.

Dans le cas d'une courbe, la première loi se traduit par une simple inégalité, qui exprime que le sens de la force de frottement est opposé à celui de la vitesse de glissement. Si la liaison est, au contraire, une surface, il faut encore exprimer que cette force et cette vitesse se trouvent sur la même droite du plan tangent, ce qui se traduit par une équation.

Pour la deuxième loi, on doit calculer la composante normale de la réaction, c'est-à-dire la longueur N de la projection de cette réaction sur le plan normal à C ou sur la normale à S; puis, on écrit que

$$\frac{\Phi}{N} = f, \tag{56}$$

f désignant le coefficient de frottement.

On voit que, dans tous les cas, les lois du frottement nous donnent juste autant d'équations supplémentaires qu'il nous en fallait. *Le mouvement est donc encore une fois déterminé.*

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, *ces lois du frottement sont purement empiriques.* La première paraît assez intuitive et a probablement une grande exactitude. Quant à la seconde, elle n'a été établie que dans certaines conditions particulières et il est dangereux de l'extrapoler en dehors de ces conditions. En particulier, il est probable que le coefficient de frottement, qui, en principe, ne dépend que de la nature des surfaces matérielles en contact, dépend en réalité de la vitesse de glissement, lorsque celle-ci devient très grande. Il varie peut-être aussi lorsque la composante normale N devient très grande. D'ailleurs, la moindre modification physique apportée aux surfaces en contact peut changer considérablement sa valeur, qui n'est jamais connue qu'avec une approximation assez

grossière, comme on s'en rend compte aisément en comparant les coefficients donnés par des recueils différents.

La conclusion à tirer de tout ceci est qu'*il ne faut jamais perdre son temps à vouloir traiter avec une grande précision numérique l'étude d'un mouvement où l'on est obligé de tenir compte du frottement*.

Quant à la mise en équation du problème, elle se fera en introduisant, par exemple, les composantes de la réaction suivant les axes du trièdre de référence et écrivant ensuite, outre les équations générales (2), les équations qui traduisent les lois du frottement. Cela conduit généralement à des calculs très compliqués et l'on ne peut s'en tirer pratiquement que dans quelques cas très simples (*cf.* n° 85).

Dans le cas où la liaison est une courbe fixe, on peut, comme tout à l'heure, employer les équations intrinsèques

$$(37)\qquad m\frac{dv}{dt} = F_T + \Phi, \qquad m\frac{v^2}{R} = F_N + R_N, \qquad F_B + R_B = 0,$$

auxquelles on doit ajouter (36), la composante normale N étant donnée par la formule

$$(38)\qquad N = \sqrt{R_N^2 + R_B^2}.$$

En éliminant les composantes de la réaction, on trouverait l'équation différentielle du mouvement.

73. Même lorsque les liaisons sont indépendantes du temps, *on n'a pas le droit*, comme au n° 71, *d'appliquer le théorème des forces vives en négligeant le travail de la réaction*. Loin d'être nul, celui-ci est, au contraire, lorsque C ou S est fixe, toujours négatif. En effet, la projection de la réaction sur le déplacement élémentaire est toujours dirigée en sens inverse de ce dernier; le travail élémentaire de la réaction est donc constamment négatif et, par suite, aussi son travail fini, dans un intervalle de temps quelconque. Si l'on applique le théorème des forces vives, on voit que *le frottement absorbe toujours de l'énergie cinétique* [1]; il diminue donc la vitesse.

---

[1] On sait que cette énergie se transforme en chaleur, ce qui est une autre forme d'énergie cinétique, si l'on admet les théories cinétiques de la matière.

74. Liaisons unilatérales. — On dit que la liaison du point M sur la surface S est *unilatérale si le point peut quitter la surface d'un seul côté*. Elle est, au contraire, *bilatérale, s'il ne peut la quitter ni d'un côté ni de l'autre*.

Dans la première hypothèse, soit E le côté vers lequel M peut quitter S. On admet que la *réaction doit toujours être dirigée de ce côté* et que, dès que le calcul implique une réaction dirigée de l'autre côté, le point M quitte nécessairement la surface; le mouvement devient libre. Pour apercevoir aisément dans quel cas on se trouve, il est commode d'orienter la normale à la surface vers la région E; on calcule ensuite la composante normale algébrique N de la réaction. Tant que N reste positif, le point reste sur la surface; dès que N tend à devenir négatif (dans l'hypothèse où M resterait sur S), le point quitte la surface et il n'y a plus de réaction.

On réalise matériellement une liaison unilatérale, en posant le point d'un côté de la surface. (Pour réaliser la liaison bilatérale, il faudrait construire deux feuillets très rapprochés, entre lesquels on introduirait le point M.) L'hypothèse faite plus haut sur le sens de la réaction s'exprime alors quelquefois en disant qu'il n'y a *pas d'adhérence*.

On peut aussi réaliser matériellement la liaison unilatérale à l'aide d'un *fil* flexible et inextensible. Le point M est attaché à une extrémité et l'autre extrémité est attachée à un point fixe O. Si l'on s'en tient là, la surface S est évidemment une sphère de centre O et de rayon égal à la longueur du fil. Mais, on peut aussi astreindre le point M à décrire une surface quelconque, en obligeant le fil à s'appuyer, sur une partie de sa longueur, sur une surface S', sur laquelle il peut glisser librement. Cette généralisation est toutefois plus théorique que pratique et la liaison par fil n'est guère utilisée que pour le pendule sphérique.

Quoi qu'il en soit, si le fil est parfaitement flexible (n° 146) et si, de plus, sa masse est négligeable vis-à-vis de la force appliquée au point M, ce mode de liaison réalise à peu près parfaitement *l'absence de frottement*. Nous verrons, en effet (n° 146), que le fil est constamment rectiligne (dans sa partie libre, bien entendu) et que sa tension est dirigée suivant sa propre direction. Comme la tension en M est opposée à la réaction du fil sur M et comme, d'autre part, le fil est constamment normal à la surface S décrite par M (parce

qu'il est inextensible) [1], on voit bien que la réaction est normale à S.

La liaison unilatérale sur une courbe n'a évidemment aucun sens dans l'espace, puisque la courbe ne partage pas l'espace en deux régions. On ne peut en parler qu'en Dynamique plane et l'on peut alors la réaliser matériellement au moyen d'un fil, comme dans le pendule simple.

(1) Cela est évident dans le cas de la sphère. Dans le cas de la généralisation indiquée plus haut, cela résulte d'une extension à la théorie des surfaces de la propriété des développantes de courbes planes (t. II, n° 317).

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DE LA DYNAMIQUE DU POINT.

75. Pesanteur. — Par rapport à la Terre, tous les corps placés à sa surface obéissent à une loi de force relative très simple, qui est la pesanteur. L'expérience montre que tout point matériel M abandonné librement dans le vide ([1]), en un lieu déterminé, prend, par rapport à un trièdre de référence lié à la Terre et quelles que soient les conditions initiales, une accélération constante g ([2]), dirigée suivant la verticale, c'est-à-dire vers le centre de la Terre. A l'intérieur d'une région de faibles dimensions par rapport au rayon terrestre, cette accélération peut être considérée comme un vecteur constant en grandeur et en direction. En la multipliant par la masse m de M, on obtient la force de pesanteur ou *poids* de ce point. Dans n'importe quel phénomène mécanique se passant dans la région considérée, chaque point matériel est nécessairement soumis à son poids, qui est une force relative à un trièdre $Oxyz$ invariablement lié à la Terre. Mais, il peut être aussi soumis à des forces absolues, résultant de perturbations quelconques du milieu (nº 52). Ces forces absolues s'ajoutent géométriquement à la force relative de pesanteur, pour donner la force relative totale appliquée au point, c'est-à-dire le vecteur $\vec{f} = m.\vec{\gamma}$.

Il arrive quelquefois que les forces absolues sont beaucoup plus

([1]) Ou dans l'air, mais avec une vitesse assez faible pour qu'on puisse négliger sa résistance.

([2]) On sait que cette accélération est de $9^m,81$ par seconde par seconde à Paris. Elle varie un peu avec la latitude. Elle décroît, quand on s'élève, en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre. Mais toutes ces variations sont négligeables en Mécanique appliquée; on n'en tient compte que dans les expériences précises de Physique.

grandes que le poids et qu'on peut, sans erreur sensible, négliger ce dernier ou, comme on dit, considérer le point comme *soustrait à l'action de la pesanteur*. Quand on parle, au contraire, dans les énoncés de problèmes de Mécanique, de points pesants, on entend par là que les poids de ces points ne sont pas négligeables et qu'ils doivent être pris en considération.

76. Mouvement d'un projectile dans le vide. — Considérons un projectile assez petit pour pouvoir être assimilé à un point. Lançons-le, à partir d'un point O, avec une vitesse initiale v_0, faisans l'angle α avec le plan horizontal. Cherchons quel va être son mouvement.

Si, comme il arrive toujours dans la pratique, le projectile est lancé dans l'air, il va être soumis à une force absolue, qui est la résistance de l'air et qui, pour les grandes vitesses, est beaucoup plus importante que la pesanteur. Au contraire, si la vitesse est faible, cette résistance est négligeable et tout se passe à peu près comme si le point était lancé dans le vide ([1]). Cela simplifie considérablement le problème, et c'est cette solution théorique que nous allons étudier rapidement dans ce paragraphe.

Prenons pour axe des x une demi-droite ayant la direction et le sens de la projection horizontale du vecteur vitesse initiale, pour axe des y la verticale ascendante de O et un axe des z perpendiculaire aux deux précédents. Les composantes du poids du point M sont alors

$$X = 0, \qquad Y = -mg, \qquad Z = 0.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations différentielles du mouvement (n° 57), on obtient

$$(1) \qquad x'' = 0, \qquad y'' = -g, \qquad z'' = 0.$$

Ces équations s'intègrent immédiatement. Occupons-nous d'abord de la dernière. Elle nous donne $z' =$ const., et comme la projection de la vitesse initiale sur Oz est nulle, cette constante est nulle. En intégrant une nouvelle fois et remarquant que z est également nul

([1]) Pour les projectiles des armes à feu, cette approximation est toujours très erronée et les balisticiens doivent toujours tenir compte de la résistance de l'air. Néanmoins, l'étude du mouvement dans le vide leur a quelquefois rendu service, en leur servant de terme de comparaison pour la recherche de formules empiriques.

à l'origine, on a $z = 0$. Le mouvement a donc lieu entièrement dans le plan vertical xOy qui contient la vitesse initiale, ainsi qu'on aurait pu le prévoir, par raison de symétrie. Ce plan s'appelle le *plan de tir*.

Intégrons maintenant la première équation (1). Si l'on observe que la projection horizontale de la vitesse initiale est $v_0 \cos\alpha$ et que la valeur initiale de x est nulle, on obtient

$$(2) \qquad x = v_0 \cos\alpha . t.$$

En opérant de même pour y, on trouve, sans difficulté,

$$(3) \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha . t.$$

Les équations (2) et (3) définissent le mouvement dans le plan de tir. On retrouve le mouvement uniformément varié étudié au n° 18.

On a l'équation de la trajectoire, en éliminant t :

$$(4) \qquad y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

La trajectoire est donc une *parabole*, qui a son axe vertical et sa concavité tournée vers le bas.

Le *point de chute* est le point de rencontre avec le plan horizontal du point de départ, c'est-à-dire avec Ox. On obtient son abscisse X, qu'on appelle la *portée*, en faisant $y = 0$ dans (4); cela donne

$$(5) \qquad X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

On voit que deux valeurs complémentaires de α donnent la même portée. On a la portée maximum $\frac{v_0^2}{g}$, en tirant à 45°.

La *durée de trajet* est obtenue en faisant $y = 0$ dans (3), ce qui donne

$$(6) \qquad T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Elle augmente constamment avec l'angle de tir.

La *flèche* est le maximum de y. On l'obtient en remplaçant t

par $\frac{T}{2}$ dans (3) :

$$F = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}. \tag{7}$$

Elle ne dépend que de la composante verticale de la vitesse initiale. En particulier, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si on lance le projectile verticalement de bas en haut, il monte à la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$.

77. *Parabole de sûreté.* — La vitesse initiale étant donnée, cherchons sous quel angle α il faut tirer pour atteindre un point donné $P(x, y)$ du plan de tir. Il suffit de résoudre l'équation (4) par rapport à α, en y regardant x et y comme les coordonnées de P. Or, elle peut s'écrire

$$\frac{x^2 g}{2v_0^2}\operatorname{tang}^2\alpha - x \operatorname{tang}\alpha + \frac{x^2 g}{2v_0^2} + y = 0. \tag{8}$$

Elle est du second degré en $\operatorname{tang}\alpha$. Il y a donc deux solutions, c'est-à-dire deux trajectoires qui passent par P, sous la seule condition que cette équation ait ses racines réelles, ce qui exige, tous calculs faits,

$$x^2 + \frac{2v_0^2}{g}\left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right) \leqq 0. \tag{9}$$

Cette condition est remplie à l'intérieur d'une parabole, dont le sommet est le point culminant de la trajectoire rectiligne, dont le foyer est O et qu'on appelle la *parabole de sûreté*. Cette parabole est l'enveloppe des trajectoires, car son équation a été obtenue en écrivant que l'équation (8) a une racine double en $\operatorname{tang}\alpha$ (t. II, n° 272).

78. Mouvement vertical d'un projectile dans l'air. — Quand un corps solide se déplace dans l'air calme avec une certaine vitesse v, il est soumis à des réactions distribuées sur sa périphérie, suivant une loi plus ou moins compliquée. Ces réactions peuvent, au sens de la théorie des vecteurs, ne pas être réductibles à une force unique (t. II, n° 121). Leur ensemble agit à la fois sur la vitesse du centre de gravité et sur l'orientation du projectile. Le problème, envisagé de ce point de vue général, est fort compliqué, tant par ses difficultés expérimentales que par ses difficultés théoriques. On le simplifie dans la pratique, en assimilant le projectile à un point. La résistance de l'air est alors une force R, opposée à la vitesse et croissant avec elle. Pour les grandes vitesses, telles que celles des projectiles des armes à feu,

la fonction qui relie R à v est très compliquée ; les balisticiens l'ont déterminée expérimentalement avec une précision assez grossière, mais néanmoins suffisante pour les besoins des artilleurs. Pour les faibles vitesses, des expériences plus nombreuses et plus précises ont été faites, soit à la Tour Eiffel, soit dans des laboratoires aérodynamiques. Elles ont montré que la résistance de l'air est sensiblement de la forme

$$R = kSv^2, \tag{10}$$

S désignant la surface de la section droite du cylindre circonscrit au projectile parallèlement à la vitesse et k désignant un coefficient numérique, dont la valeur dépend beaucoup de la forme du corps solide et aussi de ses dimensions. Si R est évalué en kilogrammes, S en mètres carrés et v en mètres par seconde, on trouve, par exemple, que k croît de 0,065 à 0,08 pour une plaque carrée dont le côté croît de 10^{cm} à 1^{m} et qui se déplace avec une vitesse normale à son plan. Pour une sphère de 25^{cm} de diamètre, $k = 0,011$. Pour une demi-sphère, $k = 0,021$ ou 0,083 suivant que le grand cercle de base est tourné vers l'arrière ou vers l'avant.

On peut déterminer complètement par des quadratures le mouvement d'un point pesant soumis à une telle résistance. Nous nous contenterons d'examiner ici le cas particulier du *mouvement rectiligne vertical*.

Pour simplifier les notations, nous poserons, en appelant m la masse du projectile,

$$\frac{kS}{m} = c \tag{11}$$

et nous donnerons à cette constante c le nom de *coefficient balistique* du projectile.

79. I. *Mouvement ascendant.* — L'équation différentielle du mouvement est, en divisant par m,

$$\frac{dv}{dt} = -g - cv^2. \tag{12}$$

Les variables sont séparées et l'on a

$$t = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g + cv^2}. \tag{13}$$

Cette intégrale se calcule immédiatement par un arc tangente et donne

(14) $$v = \sqrt{\frac{g}{c}}\,\mathrm{tang}(\varphi_0 - at),$$

en posant

(15) $$\mathrm{tang}\,\varphi_0 = v_0\sqrt{\frac{c}{g}}, \qquad a = \sqrt{cg}.$$

Si z désigne l'altitude du projectile au-dessus de son point de départ, on a, en intégrant (14) par rapport à t,

(16) $$z = \int_0^t v\,dt = \frac{1}{c}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\cos(\varphi_0 - at)}{\cos\varphi_0}\right].$$

Ces formules sont valables jusqu'au moment où la vitesse s'annule, c'est-à-dire jusqu'au temps

(17) $$\mathrm{T} = \frac{\varphi_0}{a},$$

qui est la durée de trajet du mouvement ascendant. L'altitude du point culminant est obtenue en faisant $t = \mathrm{T}$ dans (16) :

(18) $$\mathrm{Z} = \frac{1}{c}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\cos\varphi_0}\right) = \frac{1}{2c}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{c}{g}\,v_0^2\right).$$

Lorsque c tend vers zéro, on retrouve bien la formule du vide. Pour les très petites valeurs de c, on peut prendre la formule approchée

(19) $$\mathrm{Z} = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - c\,\frac{v_0^2}{2g}\right) = \mathrm{Z}_0(1 - c\mathrm{Z}_0),$$

Z_0 désignant l'altitude correspondant au vide.

Le bon sens indique que Z doit diminuer quand c augmente. C'est ce qu'il est possible de vérifier sur (18), en démontrant que la dérivée $\frac{d\mathrm{Z}}{dc}$ est négative [1].

80. II. *Mouvement descendant.* — L'équation différentielle du

---

[1] Cette dérivée a le signe de $y = \frac{cv_0^2}{g + cv_0^2} - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{c}{g}\,v_0^2\right)$. En prenant la dérivée de cette fonction de c, on constate qu'elle est négative; donc, y décroît. Or, pour $c = 0$, elle est nulle. Donc, elle est négative pour $c > 0$.

mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2. \tag{20}$$

Comme précédemment, on en tire

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - cv^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{Log}\left(\frac{V + v}{V - v} \cdot \frac{V - v_0}{V + v_0}\right), \tag{21}$$

a désignant la même quantité que tout à l'heure et V étant donné par

$$V = \sqrt{\frac{g}{c}} = \frac{g}{a} = \frac{a}{c}. \tag{22}$$

On peut résoudre l'équation (21) par rapport à v; on obtient une formule qui peut s'écrire, par exemple,

$$v = V \frac{\operatorname{th} at + \dfrac{v_0}{V}}{1 + \dfrac{v_0}{V} \operatorname{th} at}. \tag{23}$$

Si $v_0 < V$, on peut poser $\frac{v_0}{V} = \operatorname{th}\varphi_0$ et la formule devient

$$v = V \operatorname{th}(at + \varphi_0). \tag{24}$$

Si $v_0 > V$, on pose, au contraire, $\frac{V}{v_0} = \operatorname{th}\varphi_0$ et l'on a

$$v = \frac{V}{\operatorname{th}(at + \varphi_0)}. \tag{25}$$

Ces deux formules (24) et (25) auraient pu se déduire directement de la formule (14), en remarquant que (20) résulte de (12) par le changement de g en $-g$. En faisant ce changement dans (14), $\sqrt{\frac{g}{c}}$ se change en iV et a en ia. Si l'on se reporte aux formules (38) du n° 109 du Tome I, on aboutit à la formule (24), qui n'a de sens que si $v_0 < V$, puisque la tangente hyperbolique est toujours plus petite que 1 (t. I, n° 109). Pour obtenir (25), il suffit de partir de (14), en remplaçant la tangente par l'inverse d'une tangente, ce qui revient à changer la valeur de φ_0.

Ayant v en fonction de t, nous avons z par une quadrature. En

intégrant (24) et (25) et remarquant que $\frac{V}{a} = \frac{1}{c}$, il vient

$$(26) \qquad z = \frac{1}{c} \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{ch}(at+\varphi_0)}{\operatorname{ch}\varphi_0}\right], \qquad \text{si} \qquad v_0 < V;$$

$$(27) \qquad z = \frac{1}{c} \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{sh}(at+\varphi_0)}{\operatorname{sh}\varphi_0}\right], \qquad \text{si} \qquad v_0 > V.$$

Il est facile maintenant de se rendre compte du mouvement. Les formules (24) et (25) nous montrent d'abord que v tend toujours vers V, lorsque t devient infini, puisque $\operatorname{th}\infty = 1$. Le mouvement tend donc à devenir uniforme, la *vitesse limite* étant V. En outre, v varie toujours dans le même sens, puisque la tangente hyperbolique est une fonction croissante. Suivant que la vitesse initiale est inférieure ou supérieure à la vitesse limite, le mouvement est constamment accéléré ou constamment retardé.

La rapidité avec laquelle on se rapproche du mouvement uniforme est d'autant plus grande que la constante a est plus grande, c'est-à-dire, d'après (15), que le coefficient balistique est plus grand. La formule (22) nous montre, de son côté, que la vitesse limite varie en raison inverse de la racine carrée de ce coefficient. *La chute est donc d'autant plus lente que le coefficient balistique est plus grand.* Ceci permet d'expliquer certains faits d'expérience bien connus de tout le monde. On sait, par exemple, qu'une balle de plomb tombe beaucoup plus vite qu'une balle de liège de même diamètre. Effectivement, la formule (11) montre que c est plus petit pour la première balle que pour la seconde, car kS est le même dans les deux cas, tandis que la masse m est beaucoup plus grande pour le plomb que pour le liège.

81. Pendule simple. — Le pendule simple est constitué par un point pesant assujetti à se déplacer, sans frottement, sur une circonférence située dans un plan vertical. On pourrait l'obtenir en réalisant matériellement la circonférence; mais, il serait alors très difficile de supprimer le frottement. On y arrive, au contraire, très simplement, en suspendant le point (qui sera, par exemple, une petite sphère) à un fil flexible et inextensible, dont l'autre extrémité est fixe (n° 74) [1]. A vrai dire, on réalise ainsi un pendule sphérique,

[1] Cela ne supprime pas complètement le frottement, à cause de la raideur du

puisque cette liaison impose seulement au point d'être sur une sphère ayant pour centre le point de suspension et pour rayon la longueur du fil. Mais il suffit, pour avoir le pendule circulaire, de l'abandonner sans vitesse initiale ou, plus généralement, de le lancer avec une vitesse initiale située dans le plan vertical qui passe par la position initiale du fil. Ce plan est alors un plan de symétrie du phénomène et contient nécessairement la trajectoire, qui est donc un grand cercle vertical.

La réaction du fil sur le point est sa tension, dirigée suivant MO (n° 146). Elle est bien normale à la trajectoire, ce qui prouve l'absence de frottement. De plus, la liaison est unilatérale; la réaction doit être dirigée dans le sens MO, pour que le fil reste tendu.

Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'appliquer le théorème des forces vives, sans s'occuper de la réaction, qui ne travaille pas (n° 71). Si v désigne la vitesse du point M et z sa cote au-dessous du point O, on a

$$v^2 = 2gz + h, \tag{28}$$

car le poids dérive de la fonction de force $U = mgz$. La constante h est déterminée par les conditions initiales :

$$h = v_0^2 - 2gz_0. \tag{29}$$

Prenons pour inconnue l'élongation du pendule, c'est-à-dire l'angle φ de la verticale descendante Oz avec OM, le plan étant orienté dans un sens quelconque. Si l désigne la longueur OM du pendule, on a

$$v = l\varphi', \qquad z = l\cos\varphi. \tag{30}$$

En portant dans (28), on a

$$\varphi'^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - a), \tag{31}$$

a désignant une constante que nous substituons à h et qui est donnée par la formule

$$a = -\frac{h}{2gl} = \frac{z_0}{l} - \frac{v_0^2}{2gl}. \tag{32}$$

---

fil, qui existe toujours un peu et aussi, quand le pendule oscille dans l'air, à cause de la résistance de l'air. Mais pratiquement, ces perturbations sont très faibles.

Les variables sont séparées et l'on a

$$(33)\qquad t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - a}}.$$

Cette intégrale ne se calcule pas par les fonctions élémentaires, car si l'on pose, par exemple, $\cos\varphi = x$, on obtient un polynome du troisième degré sous le radical. On peut néanmoins se rendre compte du mouvement, en remarquant que $\cos\varphi$ doit rester supérieur à a, pour que le radical demeure réel. Ceci nous conduit à distinguer deux cas :

82. *Premier cas* : $a < -1$, ou $v_0 > v_1$, en posant

$$(34)\qquad v_1 = \sqrt{2g(z_0 + l)}.$$

Quel que soit φ, son cosinus est supérieur à -1, donc à a. Il s'ensuit que φ croît au delà de toute limite, si l'on suppose, pour fixer les idées, que φ'_0 est positif. Autrement dit, le point M tourne indéfiniment sur la circonférence. Ce mouvement de rotation est évidemment périodique, car si l'on augmente φ de 2π, t est augmenté de la quantité constante [1]

$$(35)\qquad \mathrm{T} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - a}}.$$

En outre, deux arcs symétriques par rapport à Oz sont parcourus dans le même temps, car l'élément différentiel de l'intégrale y reprend les mêmes valeurs.

Deuxième cas : $a > -1$, ou $v_0 < v_1$. — Comme a est nécessairement $\leqq 1$, car le radical est certainement réel au temps zéro [2], il

---

[1] L'intégrale est augmentée de

$$\Delta\mathrm{I} = \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} = \int_{\varphi}^{0} + \int_{0}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+\varphi}.$$

Or, si l'on change φ en $\varphi + 2\pi$ dans $\int_{\varphi}^{0}$, on obtient $\int_{\varphi+2\pi}^{2\pi}$, qui se détruit avec $\int_{2\pi}^{2\pi+\varphi}$. Donc, $\Delta\mathrm{I} = \int_{0}^{2\pi}$.

[2] Cela résulte aussi de la formule (32), qui montre que $a = \cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{2gl}$ est $\leqq \cos\varphi_0 \leqq 1$.

existe deux angles φ_1, $-\varphi_1$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$, dont le cosinus est égal à a. Il leur correspond deux points M_1 et M'_1 symétriques par rapport à Oz. Puisque $\cos\varphi$ doit rester $\geqq \cos\varphi_1$, φ doit rester compris entre φ_1 et $-\varphi_1$; autrement dit, M doit rester sur l'arc $M_1PM'_1$, P désignant le point le plus bas de la circonférence. Si l'on suppose, comme tout à l'heure, $\varphi'_0 > 0$, φ commence par croître. Il atteint φ_1 en un temps fini, car la quantité sous le signe $\int$ de la formule (33) devient infiniment grande d'ordre $\frac{1}{2}$ (t. I, n° 154) [1]. Puis, il se met à décroître jusqu'à $-\varphi_1$, croît de nouveau jusqu'à φ_1 et ainsi de suite. Le mouvement est donc une oscillation indéfinie sur l'arc $M_1PM'_1$. Cette oscillation est évidemment périodique; on peut même ajouter que la durée T d'une oscillation simple est la même dans les deux sens et que, comme dans le premier cas, deux arcs symétriques par rapport à Oz sont parcourus dans des temps égaux, de sorte que

$$(36)\qquad T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_1}}.$$

Cas intermédiaire : $a = -1$, ou $v_0 = v_1$. — La quantité sous le radical peut alors s'écrire

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

et la formule (33) devient, en supposant $\varphi'_0 > 0$,

$$(37)\qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\tan\frac{\pi+\varphi}{4}}{\tan\frac{\pi+\varphi_0}{4}}\right];$$

d'où l'on tire

$$(38)\qquad \tan\frac{\pi+\varphi}{4} = \tan\frac{\pi+\varphi_0}{4}\,e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Cette formule montre que, lorsque t croît de 0 à $+\infty$, φ croît de φ_0 à π. Autrement dit, M se déplace constamment dans le sens positif et tend asymptotiquement vers le point le plus haut P'.

Les résultats de cette discussion sont bien conformes avec le bon

---

[1] Car φ_1 est une racine simple de la quantité sous le radical, puisque la dérivée $-\sin\varphi_1$ n'est pas nulle.

sens, car l'expérience la plus vulgaire nous apprend que pour faire faire un tour complet à un pendule, il faut le lancer avec une grande vitesse ; si la vitesse est faible, on obtient seulement des oscillations. Quant au cas intermédiaire, il est évidemment purement théorique, car on ne peut jamais réaliser rigoureusement une égalité dans une expérience [1]. Mais, on peut s'en approcher, en supposant toutefois, comme nous allons le voir plus loin, la liaison bilatérale. L'expérience consiste alors à lancer une bille dans un tube circulaire, de telle manière qu'elle s'arrête juste au point le plus haut ou dans son voisinage [2].

83. Calcul de la réaction. — Appliquons la deuxième équation intrinsèque (n° 58), en orientant la normale vers le centre du cercle

$$m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + R; \tag{39}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (28) et de (32),

$$R = \frac{m}{l}(3gz + h) = \frac{mg}{l}(3z - 2la) = mg(3\cos\varphi - 2a). \tag{40}$$

Cherchons si cette réaction peut devenir négative, c'est-à-dire si le fil peut se détendre. Pour cela, il faut et il suffit que $\cos\varphi$ puisse devenir $< \frac{2}{3}a$. Or, le minimum de ce cosinus est a ou -1, suivant que le mouvement est oscillatoire ou rotatoire. Il faut que ce minimum soit $< \frac{2}{3}a$. Dans le cas du mouvement oscillatoire, on doit avoir $a < \frac{2}{3}a$, ce qui exige $a < 0$. Autrement dit, les extrémités M_1 et M'_1 de l'arc d'oscillation doivent être au-dessus du plan horizontal H qui passe par O. Si cette condition est remplie, la réaction change de signe, donc le fil se détend, au moment où M atteint le plan horizontal H′ situé à une distance au-dessus de H égale aux $\frac{2}{3}$ de la distance de M_1 à H. A partir de ce moment, le point M devient libre et l'on est ramené au problème du n° 76.

Dans le cas du mouvement de rotation, on doit avoir $-1 < \frac{2}{3}a$ ou, en tenant compte de (32),

$$v_0^2 < g(2z_0 + 3l) = v_2^2. \tag{41}$$

---

(1) De plus, les frottements, que nous avons négligés dans cette théorie, sont suffisants, quelle que soit leur petitesse, pour modifier nos conclusions dans ce cas particulier.

(2) L'arrêt est justement produit par le frottement.

Cette inégalité est compatible avec $v_0 > v_1$, car $v_1 < v_2$. Si donc, v_0 est compris entre v_1 et v_2, le fil se détend encore. Ceci arrive, en particulier, dans le cas intermédiaire étudié tout à l'heure, qui ne peut donc être réalisé que si la liaison est bilatérale.

84. Petites oscillations. — Le pendule n'est guère utilisé dans la pratique que dans le cas particulier où il effectue de très petites oscillations. On peut alors simplifier considérablement l'étude de son mouvement. Supposons, par exemple, qu'on l'abandonne, sans vitesse initiale, avec une élongation très petite α. Comme l'angle φ varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$, il demeure constamment très voisin de zéro et l'on peut, dans la formule (33), remplacer, sous le radical, $\cos\varphi$ par $1-\frac{\varphi^2}{2}$. On peut alors intégrer par un arc sinus. On arrive plus simplement au résultat en partant de l'équation différentielle du second ordre à laquelle doit satisfaire φ. Cette équation peut se déduire de (31), en dérivant par rapport au temps et divisant par $2\varphi'$. On obtient ainsi [1]

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{42}$$

Si l'on remplace maintenant le sinus par l'arc, il vient

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{43}$$

équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégrale générale est (t. I, n° 197)

$$\varphi = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Comme nous supposons $\varphi'_0 = 0$ et $\varphi_0 = \alpha$, on a $B = 0$ et $A = \alpha$; donc,

$$\varphi = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t. \tag{44}$$

Le mouvement est un mouvement vibratoire simple [2]. Sa demi-

---

[1] Cette équation pourrait aussi être obtenue en appliquant la première équation intrinsèque (n° 58) ou bien le théorème du moment cinétique par rapport à O (n° 59).

[2] En réalité, il n'est pas rigoureusement rectiligne; mais, au degré d'approximation que nous avons admis, on peut confondre l'arc d'oscillation avec un segment de la tangente en P.

période ou durée d'une oscillation simple est

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{45}$$

Elle est indépendante de α; c'est la loi de l'*isochronisme des petites oscillations*. Ce n'est qu'une loi approchée, car la véritable valeur de T est donnée par (36) ou

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} \tag{46}$$

et elle dépend de α.

On peut en chercher une valeur plus approchée que la valeur (45), en poussant, sous le radical, les développements de $\cos\varphi$ et $\cos\alpha$ jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2 - \frac{1}{12}(\alpha^4 - \varphi^4)}}. \tag{47}$$

Si l'on pose $\varphi = \alpha u$, l'intégrale du second membre devient

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\left[1 - \frac{\alpha^2}{12}(1 + u^2)\right]}}.$$

Si l'on développe, par la série du binome, la quantité sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de α^2, en s'arrêtant au terme en α^2, il vient

$$I = \int_0^1 \frac{1 + \frac{\alpha^2}{24}(1 + u^2)}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{24}\right) + \frac{\alpha^2}{24}J,$$

avec

$$J = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4},$$

en posant $u = \sin\theta$. Finalement,

$$I = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

et, en portant dans (47),

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \tag{48}$$

L'erreur commise en adoptant cette formule est du quatrième ordre en α.

85. Plan incliné. — Considérons un plan P, qui fait l'angle i avec le plan horizontal. Supposons qu'un point M, de masse m, soit assujetti à se déplacer dans ce plan, lequel sera d'abord supposé parfaitement poli. Si nous projetons $\vec{f} = m.\vec{\gamma}$ sur le plan, la projection de la force se réduit à la projection du poids de M, puisque la réaction du plan est normale; c'est un vecteur égal à $mg \sin i$ et dirigé suivant la ligne de plus grande pente descendante. D'autre part, la projection de $\vec{\gamma}$ est ce vecteur lui-même, puisqu'il est dans le plan P. Le mouvement du point M est donc le même que s'il était libre dans le plan P, la pesanteur étant dirigée suivant la ligne de plus grande pente descendante et réduite dans le rapport $\sin i$. On est dès lors ramené au n° 76 et le mouvement, pour des conditions initiales quelconques, est un mouvement parabolique, se déduisant de celui du n° 76 par le changement de g en $g \sin i$.

Supposons maintenant qu'il y ait du frottement. Nous nous bornerons à considérer le cas où la vitesse initiale est dirigée suivant une ligne de plus grande pente Ox, de sorte que le mouvement se fait sur cette ligne, par raison de symétrie. En projetant $\vec{f} = m.\vec{\gamma}$ sur Ox, on a

$$(49) \qquad m x'' = mg \sin i + R_x.$$

D'autre part, en projetant sur la normale au plan et en remarquant que la projection de $\vec{\gamma}$ est nulle, on voit que la réaction normale N est égale et opposée à la composante normale du poids mg, de sorte que

$$(50) \qquad N = mg \cos i.$$

La force de frottement est égale à $f N = f mg \cos i$; elle est égale à $\pm R_x$, suivant que le mouvement a lieu vers le haut ou vers le bas.

86. *Premier cas : mouvement ascendant.* — L'équation (49) devient

$$(51) \qquad x'' = g(\sin i + f \cos i).$$

L'accélération est constante et dirigée en sens inverse du mouvement, lequel est donc uniformément retardé. En intégrant (51) et tenant

compte des conditions initiales, on a

(52) $$x' = -v_0 - g(\sin i + f\cos i)t,$$

(53) $$x = -v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin i + f\cos i)t^2.$$

La vitesse s'annule au bout du temps

(54) $$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin i + f\cos i)}.$$

Deuxième cas : mouvement descendant. — L'équation (49) devient

(55) $$x'' = g(\sin i - f\cos i).$$

Le mouvement est uniformément accéléré ou retardé, suivant que f est inférieur ou supérieur à $\tang i$. En intégrant, on trouve

(56) $$x' = v_0 + g(\sin i - f\cos i)t,$$

(57) $$x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin i - f\cos i)t^2.$$

Si $f < \tang i$, la vitesse va constamment en croissant, M descend indéfiniment d'un mouvement uniformément accéléré. Si $f > \tang i$, la vitesse s'annule au bout du temps

(58) $$t_2 = \frac{v_0}{g(f\cos i - \sin i)}.$$

Si $f = \tang i$, le mouvement est uniforme.

Cas intermédiaire : la vitesse initiale est nulle. — On ne sait pas *a priori* si le point va monter ou descendre. Toutefois, la première hypothèse est contraire au bon sens. Elle est également contraire à la théorie, car si le point commençait à monter et prenait une petite vitesse ascendante v_0, cette vitesse s'annulerait au bout du temps t_1, lequel serait infiniment petit, puisque proportionnel à v_0. Autrement dit, il est impossible que le point prenne une vitesse ascendante sans que cette vitesse s'annule aussitôt. Il ne peut donc pas monter.

Lorsque $f > \tang i$, le même raisonnement s'applique au mouvement descendant. Donc, dans ce cas, le point ne peut ni monter, ni descendre ; il reste immobile, conformément aux lois du frottement au repos (n° **129**).

Si $f > \tang i$, on peut admettre, sans être conduit à une contradiction, que le point se met à descendre. En réalité, l'expérience montre que ceci ne se produit que si $\tang i$ dépasse le coefficient de frottement au repos f_0, qui est toujours plus grand que f (n° 129).

On peut maintenant résumer comme il suit les conclusions de la discussion précédente :

Si le point est lancé vers le haut, sa vitesse décroît uniformément et s'annule au bout du temps t_1; à ce moment, le point s'arrête si $\tang i < f_0$; *sinon, il repart vers le bas, d'un mouvement uniformément accéléré.*

Si le point est lancé vers le bas, il descend indéfiniment si $\tang i > f$; *sinon, il s'arrête au bout du temps t_2.*

87. Attraction proportionnelle a la distance. — Considérons un point M, de masse m, qui, par rapport à un certain trièdre de référence $Oxyz$, est en équilibre stable dans la position O. Écartons-le dans une position très voisine M. Nous admettrons que cet écart donne naissance à une force absolue $k.\overrightarrow{MO}$, qui est une attraction proportionnelle à la distance. C'est là une hypothèse qu'on fait souvent en Physique, par exemple dans les théories qui reposent sur les mouvements vibratoires de l'éther. On la fait également en Mécanique appliquée, dans l'étude des ressorts. Par exemple, si l'on allonge un ressort à boudin (ou un fil élastique) au delà de sa longueur naturelle, la tension du ressort ou du fil est sensiblement proportionnelle à l'allongement, pourvu que cet allongement ne soit pas trop grand.

Le point M étant lancé de la position M_0 avec la vitesse v_0, cherchons le mouvement qui prend naissance. Les équations différentielles de ce mouvement sont

$$(59)\qquad mx'' + kx = 0, \qquad my'' + ky = 0, \qquad mz'' + kz = 0.$$

Ce sont des équations linéaires du second ordre à coefficients constants. Si l'on pose

$$(60)\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

l'intégrale générale est donnée par (t. I, n° 197)

$$(61)\qquad x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

et des formules analogues pour y et z, les constantes A et B étant seules changées.

Si l'on se reporte au n° 32, on reconnaît les équations générales d'une vibration elliptique de centre O et de fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{62}$$

Pour la déterminer simplement en fonction des conditions initiales, prenons OM_0 pour axe des x. Distinguons maintenant deux cas :

Premier cas : la vitesse initiale est dirigée suivant la droite OM_0. — Prenons des axes Oy et Oz quelconques. Les conditions initiales sont

$$x_0, \quad x'_0 = v_0, \quad y_0 = y'_0 = z_0 = z'_0 = 0.$$

En portant ces hypothèses dans les équations telles que (61) et dans ces équations dérivées par rapport à t, on trouve aisément

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad y = 0, \qquad z = 0. \tag{63}$$

On en conclut que le mouvement est un *mouvement rectiligne vibratoire simple.*

Deuxième cas : la vitesse initiale ne passe pas par O. — Prenons Oy parallèle à cette vitesse et Oz quelconque. Les conditions initiales sont

$$x_0, \quad x'_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = v_0, \quad z_0 = z'_0 = 0.$$

On en déduit les valeurs des constantes A, B, en faisant $t = 0$ dans les équations telles que (61) et dans leurs dérivées ; un calcul très simple conduit finalement aux équations suivantes :

$$x = x_0 \cos\omega t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad z = 0. \tag{64}$$

Le mouvement est une *vibration elliptique.*

88. Énergie d'un mouvement vibratoire. — L'attraction précédente dérive d'une fonction de force $U = -\frac{k}{2}r^2$ (n° 62). On peut donc écrire l'intégrale

des forces vives (n° 68)

$$(65) \qquad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{2} r^2 = h.$$

Les deux termes du premier membre sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du mouvement vibratoire. Leur somme constante h en est l'énergie totale; elle dépend uniquement des conditions initiales; *la vibration conserve l'énergie.*

En Mécanique appliquée, ceci n'est pas vrai, à cause des frottements inévitables et l'énergie totale diminue, car elle est absorbée progressivement par le travail des frottements, travail qui est toujours négatif (n° 73). Par exemple, si l'on bande un ressort, de manière à l'allonger ou à le raccourcir de r à partir de sa longueur naturelle, on lui donne une énergie potentielle (appelée aussi *énergie de déformation*) égale à $\frac{k}{2} r^2$. Si ensuite on l'abandonne, il se met à vibrer; l'énergie potentielle initiale se transforme plus ou moins partiellement en énergie cinétique, suivant la phase du mouvement. L'énergie totale devrait théoriquement rester constante; mais, pratiquement, elle diminue et finit par s'annuler, puisque le ressort finit par ne plus vibrer.

89. Amortissement des vibrations. — On se rend compte de cette extinction des vibrations, si l'on admet l'existence d'une *résistance constamment opposée et proportionnelle à la vitesse.* Bornons-nous au cas du mouvement rectiligne. La résistance est alors de la forme $-ax'$, a désignant une constante positive. L'équation différentielle du mouvement est

$$(66) \qquad m x'' + a x' + k x = 0.$$

C'est encore une équation linéaire à coefficients constants; mais, cette fois, elle est complète. Deux cas sont à distinguer, suivant la réalité des racines de l'équation caractéristique.

Premier cas : $a < 2\sqrt{km}$. — Les racines sont imaginaires, soit $-\alpha \pm \beta i$, avec

$$(67) \qquad \alpha = \frac{a}{2m}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4km - a^2}}{2m}.$$

L'intégrale générale de (66) est

$$(68) \qquad x = e^{-\alpha t}(\mathrm{A} \cos \beta t + \mathrm{B} \sin \beta t).$$

On reconnaît un *mouvement vibratoire amorti* (n° 27). L'amortissement est d'autant plus rapide que α est plus grand, c'est-à-dire que

le coefficient de résistance a est plus grand par rapport à la masse m. La fréquence, qui est proportionnelle à β, diminue quand a augmente.

A l'extrémité de chaque vibration, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est $\frac{k}{2}x^2$. Comme les élongations maxima décroissent en progression géométrique de raison $\sqrt{D} = e^{-\frac{\pi a}{\sqrt{4km - a^2}}}$, l'énergie totale décroît en progression géométrique de raison D. La perte d'énergie doit être égale au travail de la résistance $-ax'$. C'est ce que nous laissons au lecteur le soin de vérifier par un calcul direct, à titre d'exercice.

Deuxième cas : $a > 2\sqrt{km}$. — Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives, soient $-r$ et $-r'$. L'intégrale générale de (66) est alors

$$x = Ce^{-rt} + C'e^{-r't}. \tag{69}$$

Supposons, par exemple, que la vitesse initiale soit nulle. Les constantes C et C' sont alors déterminées par les conditions

$$C + C' = x_0, \qquad rC + r'C' = 0.$$

En résolvant ces deux équations du premier degré et portant dans (69), il vient

$$x = \frac{x_0}{r - r'}(re^{-r't} - r'e^{-rt}). \tag{70}$$

La vitesse v est ensuite donnée par

$$v = \frac{x_0 rr'}{r - r'}(e^{-rt} - e^{-r't}). \tag{71}$$

Si l'on suppose, pour fixer les idées, $r > r'$, la parenthèse est constamment négative, donc aussi la vitesse. Le point M se rapproche constamment du point O, qu'il atteint asymptotiquement pour $t = \infty$. Il n'y a plus de vibrations ; on dit que le mouvement est *apériodique*. L'amortissement est donc encore plus rapide que dans le cas précédent et cela se conçoit aisément, puisque la résistance est plus grande.

90. Entretien d'un mouvement vibratoire. — Le frottement finit par éteindre toute vibration. De là résulte le problème expérimental de l'*entretien des oscillations*. Nous ne pouvons passer en revue les différents procédés imaginés, dans ce but, par les physiciens et les

techniciens. Nous nous contenterons d'indiquer la solution qui résulte de l'emploi d'une force perturbatrice périodique.

Reprenons le point M du numéro précédent et supposons qu'on lui applique une *force perturbatrice sinusoïdale*

$$X = b \sin \omega t. \tag{72}$$

L'équation (66) est simplement modifiée par l'adjonction du terme X au second membre. Nous savons (t. I, n° 198) que l'intégrale générale (68) doit être, à son tour, modifiée par l'addition d'une solution particulière de l'équation avec second membre, laquelle est de la forme $C \cos \omega t + C' \sin \omega t$ et se détermine par la méthode des coefficients indéterminés (t. I, n° 198). Un calcul facile conduit à la solution

$$\xi = b \frac{\omega a \cos \omega t + (m\omega^2 - k) \sin \omega t}{\omega^2 a^2 + (m\omega^2 - k)^2}. \tag{73}$$

En lui ajoutant (68) ou (69), on obtient la forme nécessaire de l'élongation, dans les nouvelles conditions. Or, quelles que soient les constantes, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales, les seconds membres de (68) et de (69) tendent vers zéro. Il suit de là que l'élongation du point M tend vers ξ. On peut résumer ceci en disant que *le mouvement du point* M *résulte de la superposition de la vibration amortie qu'il prend quand il n'y a pas de force perturbatrice et qu'on appelle sa* VIBRATION PROPRE *avec une vibration non amortie qui a même période que la force perturbatrice et à laquelle il se réduit plus ou moins rapidement, suivant que l'amortissement de la vibration propre est plus ou moins grand* (¹).

91. L'effet de la force perturbatrice est donc, en définitive, d'entretenir la vibration simple définie par la formule (73). Cherchons l'amplitude A de cette vibration, ainsi que son décalage φ par rapport à la force perturbatrice. A cet effet, nous devons identifier (73) avec

$$\xi = A \sin(\omega t - \varphi). \tag{74}$$

(¹) Si les conditions initiales sont celles de la vibration (73), la vibration propre n'existe pas et, dès le début, le mouvement est rigoureusement la vibration entretenue.

On trouve

$$(75)\qquad A = \frac{b}{\sqrt{\omega^2 a^2 + (m\omega^2 - k)^2}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\omega a}{k - m\omega^2},$$

l'angle φ devant être compris entre o et $-\pi$.

Appelons *fréquence propre* du point M la fréquence $\frac{\omega'}{2\pi}$ qu'il aurait s'il n'y avait ni force perturbatrice, ni résistance, ω' étant donc égal à $\sqrt{\frac{k}{m}}$. La deuxième formule (75) nous montre que la vibration est *en retard* sur la force d'un angle inférieur ou supérieur à un angle droit, suivant que la fréquence de la force est inférieure ou supérieure à la fréquence propre. Le décalage tend vers zéro en même temps que la fréquence de la force.

Quant à l'amplitude A, il est facile d'étudier ses variations en fonction de ω, puisque cela revient à étudier les variations du trinome en ω^2 qui se trouve sous le radical. Si $a^2 < 2km$, le maximum de A est obtenu pour

$$(76)\qquad \omega^2 = \omega'^2 - \frac{a^2}{2m^2} = \omega_1^2;$$

il est égal à

$$(77)\qquad A_1 = \frac{2bm}{a\sqrt{4km - a^2}}.$$

On voit qu'il devient infini, quand a tend vers zéro, ω_1 tendant alors vers ω'. Autrement dit, *quand l'amortissement de la vibration propre est faible et que la période de la force perturbatrice est très voisine de la période propre, la vibration entretenue a une très grande amplitude*. C'est là le principe des *phénomènes de résonance*.

Lorsqu'on a rigoureusement $a = 0$ et $\omega = \omega'$, la formule (73) est en défaut et doit être remplacée par la suivante (t. I, n° 198) :

$$(78)\qquad \xi = -\frac{b}{2m\omega}\cdot t\cos\omega t.$$

La vibration n'est plus périodique; son amplitude croît proportionnellement au temps. Mais, ce cas est évidemment purement théorique.

92. Si la force perturbatrice n'est pas sinusoïdale, mais *seulement périodique*, on peut la développer en série de Fourier (n° 26) et appliquer les résultats précédents à chaque harmonique; on obtient les harmoniques de la vibration entretenue.

Si la période de la force est n fois plus grande que la période propre, le $n^{\text{ième}}$ harmonique a une très grande amplitude; il y a résonance.

93. MOUVEMENT DES PLANÈTES. — Soit un trièdre de référence $Oxyz$

ayant pour origine le centre du Soleil ([1]) et dont les axes percent la sphère céleste en des points fixes par rapport à la configuration invariable que forment les étoiles. Un tel trièdre sera appelé *trièdre absolu* ([2]).

Considérons maintenant un corps quelconque M du système solaire, que nous assimilons à un point. En vertu du principe de la gravitation universelle, la force relative totale qui lui est appliquée est la résultante des attractions newtoniennes des différents astres. On sait que cette attraction est de la forme

$$\frac{fmm'}{r^2}, \tag{79}$$

m et m' désignant les masses du corps attiré et du corps attirant, r leur distance et f un coefficient numérique, qui dépend uniquement du choix des unités et qu'on appelle la *constante de la gravitation*. Parmi les astres qui peuvent attirer M, il en est de très éloignés; ce sont tous ceux qui n'appartiennent pas au système solaire. Les attractions correspondantes sont très faibles et nous les négligeons. Quant aux astres du système solaire, il en est un qui est beaucoup plus gros que tous les autres; c'est le Soleil. A cause de sa masse, son attraction est de beaucoup la plus forte, sauf dans le cas où un autre corps du système solaire serait beaucoup plus rapproché que lui de M. Cette dernière circonstance se présente pour un satellite d'une planète, qui est beaucoup plus près de cette planète que du Soleil. Mais, si M est une planète (ou une comète), on peut admettre que l'attraction du Soleil est prépondérante et négliger toutes les autres ([3]).

Dans ces conditions, la force relative appliquée au point M est

$$\frac{km}{r^2}, \tag{80}$$

([1]) En réalité, on démontre que l'origine devrait être le centre de gravité du système solaire. Mais, il diffère très peu du centre du Soleil, à cause de la grosse masse de ce dernier, comparée aux masses des planètes.

([2]) Cette dénomination est évidemment purement conventionnelle et le mouvement par rapport à ce trièdre est un mouvement relatif comme les autres, bien qu'on ait l'habitude de le qualifier de mouvement absolu.

([3]) Bien entendu, les astronomes actuels ne se contentent pas de cette approximation et corrigent la présente solution par la théorie des *perturbations*.

m désignant la masse de ce point et k le produit de la masse du Soleil par la constante f. En outre, cette force est dirigée suivant MO. C'est une force centrale, dérivant de la fonction de forces (n° 62)

(81) $$U = \frac{km}{r}.$$

Nous savons (n° 68) que la trajectoire est dans un plan passant par O et qu'elle est décrite suivant la loi des aires par rapport à ce point. Si nous prenons des coordonnées polaires de pôle O, nous pouvons écrire l'intégrale des aires et l'intégrale des forces vives

(82) $$r^2\,d\theta = C\,dt,$$

(83) $$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \left(\frac{2k}{r} + h\right)dt^2.$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire, éliminons dt :

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \frac{r^4\,d\theta^2}{C^2}\left(\frac{2k}{r} + h\right).$$

On en tire

$$d\theta = \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{C^2}\left(\frac{2k}{r} + h\right)}}.$$

La forme du second membre nous incite à poser $\frac{1}{r} = \rho$; nous avons alors

$$\theta = \int \frac{d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{2k}{C^2}\rho + \frac{h}{C^2}}}.$$

Cette intégrale se calcule en décomposant le trinome sous le radical en une différence de deux carrés et faisant le changement de variable

$$\rho - \frac{k}{C^2} = \mu x,$$

avec

(84) $$\mu = \frac{1}{C}\sqrt{h + \frac{k^2}{C^2}}.$$

On aboutit finalement à l'équation suivante :

(85) $$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (\theta_0 = \text{const.}).$$

en posant

(86) $$p = \frac{C^2}{k}, \qquad e = \frac{\mu C^2}{k} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{k^2}}.$$

Cette équation nous montre que la trajectoire est une conique de foyer O, de paramètre p, d'excentricité e et d'axe focal $\theta = \theta_0$ (t. II, n° 520).

C'est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que e est inférieur, supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire, d'après (86), suivant que h est négatif, positif ou nul. Or, h est la constante des forces vives; elle est donnée, en fonction des conditions initiales, par la formule suivante, déduite de (83):

(87) $$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Donc, *la trajectoire est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la vitesse initiale est inférieure, supérieure ou égale à une certaine vitesse critique*, dont la valeur est $\sqrt{\frac{2k}{r_0}}$.

Pour toutes les planètes, l'excentricité est très inférieure à 1 ([1]); leurs orbites sont donc des ellipses, ressemblant beaucoup à des cercles. Les orbites hyperboliques ne se rencontrent que pour les comètes non périodiques; elles ont une excentricité très voisine de 1 et peuvent être assimilées, en première approximation, à des paraboles.

94. Équation de Képler. — Il nous reste maintenant à trouver la loi du mouvement sur la trajectoire, c'est-à-dire à calculer t. On pourrait le faire en portant (85) dans (82) et intégrant par rapport à θ. Mais, les calculs sont assez compliqués. Il est plus simple de rapporter l'orbite, que nous supposerons elliptique, à ses axes et d'introduire l'anomalie excentrique u (t. II, n° 529). Si a et b sont les longueurs des demi-axes, on a

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u.$$

Écrivons que la vitesse aréolaire par rapport au foyer S(c, 0) est

---

([1]) Elle est de l'ordre du centième, sauf pour Mercure, dont l'excentricité est 0,206.

égale à $\frac{C}{2}$:

$$\frac{1}{2}[(x-c)y'-yx'] = \frac{C}{2}$$

ou

$$(ab - cb\cos u)u' = C.$$

Divisons par ab et intégrons.

$$u - e\sin u = \frac{Ct}{ab}. \tag{88}$$

Cette équation, qui porte le nom d'*équation de Képler*, nous donne immédiatement l'époque à laquelle la planète se trouve en un point donné de son orbite. Inversement, en cherchant l'unique racine de cette équation par rapport à u (*cf.* t. I, Chap. XXII, Exercice proposé n° 8), pour une valeur donnée de t, on peut avoir la position de la planète à une époque donnée.

La durée de révolution T s'obtient en faisant $u = 2\pi$ dans (88) :

$$T = \frac{2\pi ab}{C}. \tag{89}$$

Éliminons la constante C, en la tirant de (86) et remarquant que $p = \frac{b^2}{a}$; il vient, en élevant au carré,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}. \tag{90}$$

Comme la constante k est la même pour toutes les planètes du système solaire, cette formule nous donne la *troisième loi de Képler :*

Les carrés des durées de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

CHAPITRE VII.

NOTIONS SUR LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

95. Projections des quantités de mouvement. — Considérons un système S constitué par un certain nombre de points matériels (¹), dont les mouvements sont rapportés à un même trièdre de référence $Oxyz$. Soit $M(x, y, z)$ l'un quelconque d'entre eux et soit m sa masse. Supposons qu'il lui soit appliqué différentes forces, dont la résultante $M\vec{f}$ a pour composantes X, Y, Z.

Nous avons

$$(1) \qquad mx'' = X, \qquad my'' = Y, \qquad mz'' = Z$$

et les égalités analogues pour tous les points du système. Ajoutons membre à membre toutes les équations telles que la première :

$$(2) \qquad \Sigma mx'' = \Sigma X.$$

Le second membre est la projection, sur Ox, de la somme géométrique du système de vecteurs constitué par les forces $M\vec{f}$. Quant au premier, c'est la dérivée, par rapport au temps, de la quantité $\Sigma mx'$, c'est-à-dire de la somme algébrique des projections des quantités de mouvement de tous les points du système sur l'axe des x. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème (dit *de la projection des quantités de mouvement*). — *La dérivée par rapport au temps de la projection des quantités*

(¹) Pour la commodité des raisonnements, nous supposerons toujours ces points en nombre fini. Mais, dans la réalité, on a souvent affaire à des milieux continus. On leur étend la théorie, en les divisant en petits morceaux, dont chacun est assimilé à un point et en passant à la limite, par les procédés du calcul intégral (*cf.* t. I, nᵒˢ 181, 182).

de mouvement du système sur un axe fixe est égale à la projection sur cet axe de la somme géométrique de toutes les forces appliquées au système.

Ce théorème est susceptible d'une autre interprétation. Introduisons les coordonnées (ξ, η, ζ) du centre de gravité G du système. Si M désigne la masse totale Σm, on a (t. I, n° 181)

$$M\xi = \Sigma mx. \tag{3}$$

En dérivant deux fois par rapport à t, et portant dans (2), il vient

$$M\xi'' = \Sigma X \tag{4}$$

et les égalités analogues relatives à Oy et à Oz. Ceci nous donne les équations différentielles du mouvement du point G, affecté de la masse M et nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème (dit *du centre de gravité*). — *Le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si l'on y concentrait toute la masse du système et si l'on y appliquait toutes les forces appliquées aux différents points du système.*

Ces deux formes différentes d'une même proposition sont également utilisées dans les applications. On emploie de préférence la première quand on s'aperçoit que certaines parties du système ne donnent que des termes constants dans la projection de la quantité de mouvement ; ces termes peuvent alors être négligés dans l'application du théorème, puisque leur dérivée est nulle. C'est ainsi que l'on procède dans un grand nombre de raisonnements élémentaires d'Hydrodynamique. On emploie, au contraire, le théorème du centre de gravité, lorsqu'on attache de l'importance à la connaissance du mouvement de ce point, ainsi qu'il arrive, par exemple, pour les corps solides.

96. Moment cinétique. — On appelle *moment cinétique du système par rapport au point* O la somme géométrique $\overrightarrow{OK}$ des moments cinétiques de tous les points du système (n° 59) ou, ce qui revient au même, le moment résultant de tous les vecteurs quantité de mouvement par rapport à O.

De même, on appelle *moment cinétique par rapport à un*

axe Oz le moment résultant des quantités de mouvement par rapport à cet axe.

Si l'on applique le théorème III du n° 59 successivement à tous les points du système et qu'on ajoute toutes les égalités géométriques obtenues, on aboutit à la proposition suivante :

Théorème (dit *du moment cinétique*). — *La dérivée géométrique, par rapport au temps, du moment cinétique* OK *par rapport à un point fixe* O *est équipollente au moment résultant, par rapport à* O, *de toutes les forces appliquées au système.*

Il équivaut de dire que *la vitesse du point* K *est équipollente à ce moment résultant* et aussi que *la dérivée du moment cinétique par rapport à un axe fixe est égale au moment résultant des forces par rapport à cet axe.*

97. Il importe de se rappeler que les moments doivent être pris par rapport à un point *fixe* O. On peut se demander toutefois ce que devient le théorème quand on prend les moments par rapport à un point mobile O′. D'une façon plus précise, imaginons qu'on prenne un nouveau trièdre de référence $O'xyz$ parallèle au premier et d'origine O′. On obtient un nouveau mouvement, qu'on appelle, pour abréger, le *mouvement du système autour du point* O′. Dans ce mouvement, nous pouvons évidemment appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au point O′, puisque ce point est maintenant fixe. Mais, il faut bien prendre garde que les forces ne sont plus les mêmes. Si $\vec{\gamma}$ est le vecteur accélération de O′ par rapport à l'ancien trièdre, à chaque point M du système doit être ajoutée la force d'entraînement $-m\vec{\gamma}$ (n° 48). Ces forces doivent intervenir dans l'évaluation du moment résultant par rapport à O′. Or, elles constituent un système de vecteurs parallèles, lequel est équivalent, au point de vue de la théorie des moments, à un vecteur unique (t. II, n° 127). L'origine de ce vecteur unique est le centre des distances proportionnelles des points M affectés de coefficients proportionnels aux forces $-m\gamma$ ou, ce qui revient au même, proportionnels aux masses m. C'est donc le centre de gravité G. On en conclut que, si l'on prend O′ en G et dans ce cas seulement, le moment résultant des forces $-m\vec{\gamma}$ est nul et, par suite, le moment résultant des forces relatives au nouveau trièdre de référence coïncide avec le moment résultant des forces relatives à l'ancien trièdre. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *On peut appliquer le théorème du moment cinétique* [1]

---

[1] Ce moment cinétique doit être évalué, d'après la démonstration ci-dessus, en

par rapport au centre de gravité sans changer les forces appliquées au système.

98. Forces vives. — On appelle *force vive* du système la somme des forces vives de tous ses points. L'*énergie cinétique* en est la moitié.

On peut appliquer le théorème des forces vives séparément à tous les points du système. En ajoutant toutes les égalités obtenues, on obtient le théorème suivant :

Théorème (*des forces vives*). — *La différentielle de l'énergie cinétique d'un système est égale à la somme algébrique des travaux élémentaires de toutes les forces qui lui sont appliquées.*

Ou encore : *L'accroissement algébrique d'énergie cinétique pendant un intervalle de temps quelconque est égal au travail total de toutes les forces appliquées au système pendant cet intervalle.*

Supposons qu'on applique ce théorème dans le mouvement autour du centre de gravité considéré au numéro précédent. Au travail des anciennes forces, il faut ajouter le travail des forces d'entraînement $-m\vec{\gamma}$. Or, si (x, y, z) sont les coordonnées de M par rapport aux nouveaux axes, ce travail a pour expression

$$\Sigma[-m(\xi'' dx + \eta'' dy + \zeta'' dz)] = -\xi''\Sigma m\, dx - \eta''\Sigma m\, dy - \zeta''\Sigma m\, dz.$$

Chacune des sommes du second membre est nulle, car Σmx, par exemple, est égal au produit par M de l'abscisse de G par rapport aux nouveaux axes, abscisse qui est nulle, puisque G est l'origine de ceux-ci. Comme ceci a lieu quel que soit t, on a bien aussi $\Sigma m\, dx = 0$.

Finalement, on voit qu'il est encore permis de négliger les forces d'entraînement, comme cela est arrivé déjà pour le théorème du moment cinétique, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *On peut appliquer le théorème des forces vives dans le mouvement autour du centre de gravité, en gardant les mêmes forces que dans le mouvement absolu* [1].

---

prenant les vitesses par rapport au trièdre mobile $Gxyz$. Mais, il revient au même de prendre les vitesses par rapport à $Oxyz$. Les deux systèmes de quantités de mouvement ne diffèrent, en effet, que par le système des quantités de mouvement dues aux vitesses d'entraînement, lequel équivaut à un vecteur unique d'origine G et, par conséquent, de moment nul par rapport à ce point.

[1] Bien entendu, il faut prendre les nouvelles vitesses à la fois pour le calcul de la force vive et pour le calcul du travail élémentaire.

99. Fonction de forces. — Quand un système S dépend d'un certain nombre de paramètres, le travail élémentaire des forces qui lui sont appliquées, pour un déplacement élémentaire quelconque, se présente sous la forme d'une expression linéaire par rapport aux différentielles de ces paramètres. On dit qu'*il y a une fonction de forces* U, *lorsque ce travail est la différentielle totale de* U. La fonction — U est appelée *fonction potentielle* ou simplement *potentiel*.

Lorsqu'il en est ainsi, le travail entre deux positions quelconques S_0 et S_1 est égal à l'accroissement algébrique $U_1 - U_0$ de la fonction des forces ou à la diminution du potentiel. Il est indépendant de la succession des états intermédiaires du système.

Si l'on applique le théorème des forces vives, il donne lieu, comme dans le cas du point (n° 65), à l'*intégrale des forces vives* :

$$T = U + h, \tag{5}$$

où T désigne l'énergie cinétique du système.

Si l'on désigne par V le potentiel, ceci peut s'écrire

$$T + V = h; \tag{6}$$

V est souvent appelé l'*énergie potentielle* et la somme constante T + V est appelée *énergie totale*. L'égalité (6) constitue, en quelque sorte, le schéma du *principe de la conservation de l'énergie*. Mais, en réalité, il ne se présente jamais dans la Nature sous cette forme simple et, pour lui garder toute sa généralité, on est obligé de faire rentrer dans le terme V toutes sortes d'énergies physiques, dont les variations sont dans un rapport constant avec le travail mécanique et dont les principales sont les énergies calorifique et électrique.

100. Forces intérieures. — Si l'on considère deux points quelconques M et M′ d'un système, ils exercent l'un sur l'autre deux réactions égales et opposées (n° 54). L'ensemble de toutes ces réactions constitue ce qu'on appelle les *forces intérieures* du système. Elles forment évidemment un système de vecteurs équivalent à un système nul. Il en résulte qu'elles sont sans influence sur la somme géométrique et sur le moment résultant de toutes les forces appliquées au système. Donc :

Théorème. — *On peut appliquer les théorèmes du centre de gra-*

vité (ou de la projection des quantités de mouvement) et du moment cinétique, en négligeant les forces intérieures.

Ceci est très important, parce que, la plupart du temps, on ne connaît pas ces forces intérieures, qui sont des réactions.

101. On peut se demander si cette extension s'applique aussi au théorème des forces vives. Mais, il est facile de voir que cela n'est pas, en général. Prenons, par exemple, un système réduit à deux points M et P. Soit R la valeur de la réaction qu'ils exercent l'un sur l'autre, ou, d'une manière plus précise, la mesure algébrique de la réaction exercée par P sur M, la droite MP étant orientée de M vers P. Soient M′ et P′ deux positions voisines. Le travail élémentaire des forces intérieures est

$$R.MM' \cos \widehat{M'MP} + R.PP' \cos \widehat{P'PM} = -R\,dr \quad (^1),$$

en appelant dr l'accroissement de la distance des deux points. On voit qu'il n'est nul que si les deux points demeurent à une distance invariable l'un de l'autre. *On ne peut donc affirmer la nullité du travail des forces intérieures que* dans le cas où le système est indéformable, c'est-à-dire *dans le cas d'un corps solide.*

102. Travail des forces appliquées a un corps solide. — Nous avons vu (nº 45) que tout mouvement d'un corps solide est, à chaque instant, tangent au mouvement résultant d'une translation et d'une rotation. Soient (u, v, w) les composantes de la vitesse de translation et (p, q, r) les composantes du vecteur instantané de rotation, suivant des axes rectangulaires quelconques. Si (x, y, z) désignent les coordonnées, par rapport à ces axes, d'un point M quelconque du corps solide, la vitesse de ce point a pour composantes

$$u + qz - ry, \quad v + rx - pz, \quad w + py - qx.$$

Si l'on appelle (X, Y, Z) les composantes de la force appliquée en M, le travail élémentaire entre les temps t et $t + dt$ est

$$d\mathfrak{G} = \Sigma[X(u + qz - ry) + Y(v + rx - pz) + Z(w + py - qx)]\,dt.$$

Ordonnons-le par rapport à u, v, w, p, q, r :

$$d\mathfrak{G} = [u\Sigma X + v\Sigma Y + w\Sigma Z + p\Sigma(yZ - zY) + q\Sigma(zX - xZ) + r\Sigma(xY - yX)]\,dt.$$

Or, les sommes du crochet ne sont autre chose que les coordonnées du système de vecteurs formé par les forces appliquées au corps solide et l'on reconnaît dans le crochet l'expression analytique (t. II, Chap. VIII, Exercice

(1) *Cf.* Tome II, Chapitre XIII, Exercice résolu nº 1.

proposé n° 42) du moment relatif de ce système et du système (p, q, r, u, v, w). Donc :

Théorème. — *Le travail élémentaire, pendant le temps dt, des forces appliquées à un corps solide est égal au produit par dt du moment relatif du système de vecteurs constitué par ces forces et du système de vecteurs constitué par le vecteur instantané de rotation et le couple dont l'axe est la vitesse instantanée de translation.*

Si, à l'instant considéré, le mouvement du corps solide est tangent à une translation, le travail est, au facteur dt près, le produit scalaire de la vitesse instantanée de translation et de la somme géométrique des forces.

Si, au contraire, le mouvement est tangent à une rotation, le travail est, au facteur dt près, le produit de la vitesse angulaire par le moment résultant des forces par rapport à l'axe instantané de rotation.

Si les forces forment un système équivalent à zéro, le travail est nul. C'est précisément ce qui a lieu pour le système des forces intérieures (*cf.* n° 101).

Corollaire. — *Dans un système quelconque, le travail des forces intérieures est indépendant du trièdre de référence.*

En effet, d'abord, nous savons que ces forces elles-mêmes sont indépendantes du trièdre de référence (n° 54). Dès lors, si l'on change de trièdre de référence, le nouveau travail élémentaire $d\mathfrak{T}'$ est lié à l'ancien $d\mathfrak{T}$, par la relation

$$d\mathfrak{T} = d\mathfrak{T}' + d\mathfrak{T}_e,$$

$d\mathfrak{T}_e$ désignant le travail dû aux vitesses d'entraînement. Or, dans l'évaluation de ce dernier, tout se passe comme si le système était solide, puisque les vitesses d'entraînement sont obtenues en considérant tous les points comme solidaires du nouveau trièdre de référence (n° 15). Nous pouvons donc appliquer le théorème ci-dessus et, comme les forces intérieures forment un système équivalent à zéro, le travail $d\mathfrak{T}_e$ est nul. Donc, $d\mathfrak{T} = d\mathfrak{T}'$.

103. Corps tournants. — Un problème très important dans la pratique et dont on rencontre de fréquentes applications dans l'industrie est l'étude du mouvement d'un corps solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe. Prenons cet axe pour axe des z et appelons φ l'azimut du corps solide S par rapport à un plan fixe passant par Oz, qui sera, par exemple, le plan des zx. Pour former l'équation différentielle du mouvement, nous pouvons appliquer deux méthodes :

I. *Méthode du moment cinétique.* — Nous allons écrire que la dérivée, par rapport à t, du moment cinétique par rapport à Oz est

égale au moment résultant C des forces par rapport à Oz, moment qu'on appelle habituellement le *couple appliqué au corps solide.*

Il s'agit d'évaluer le moment cinétique par rapport à Oz. Soient M un point quelconque de S et P sa projection sur Oz. Le moment cinétique de M par rapport à Oz est le moment de son vecteur quantité de mouvement par rapport à P. Or, si m désigne la masse de M, r la distance MP et ω la vitesse angulaire, le vecteur quantité de mouvement est égal à $mr\omega$; en outre, il est perpendiculaire au plan OzM. Son moment par rapport à P a pour mesure algébrique sur Oz : $mr\omega . r = mr^2\omega$. Cela est évident en valeur absolue; cela l'est aussi en signe, car le moment et le vecteur instantané de rotation doivent avoir même sens, ainsi qu'on le constate en se reportant à leurs définitions.

Le moment cinétique de tout le corps solide est maintenant

$$\Sigma mr^2\omega = \omega . \Sigma mr^2 = I\omega,$$

en appelant I le moment d'inertie de S par rapport à Oz. Donc :

THÉORÈME. — *Le moment cinétique d'un corps solide tournant par rapport à son axe de rotation est égal au produit de sa vitesse angulaire par son moment d'inertie par rapport à cet axe.*

Si nous appliquons maintenant le théorème rappelé plus haut, nous obtenons l'équation différentielle du mouvement :

$$I\frac{d\omega}{dt} = C \qquad (7)$$

ou

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = C. \qquad (8)$$

104. II. *Méthode de la force vive.* — La vitesse du point M est $r\omega$, sa force vive est $mr^2\omega^2$; celle du corps solide tout entier est donc

$$\Sigma mr^2\omega^2 = \omega^2\Sigma mr^2 = I\omega^2;$$

d'où :

THÉORÈME. — *La force vive d'un corps solide tournant est égale au produit du carré de sa vitesse angulaire par son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.*

Évaluons maintenant le travail élémentaire des forces pour une

rotation de l'angle $d\varphi$. On pourrait le déduire du théorème du n° 102. Nous préférons indiquer la méthode élémentaire suivante :

Calculons le travail de la force F appliquée au point M. A cet effet, imaginons qu'on ait pris des axes de référence tels que M soit situé sur la partie positive de Ox. Le déplacement élémentaire de M a alors pour composantes

$$dx = 0, \qquad dy = r\,d\varphi, \qquad dz = 0.$$

Si X, Y, Z sont les composantes de F, le travail élémentaire est donc, d'après la formule (8) du n° 60, $Y\,r\,d\varphi = N\,d\varphi$, en appelant N le moment de F par rapport à Oz. Si l'on applique ce résultat à toutes les forces appliquées à S, on obtient, en additionnant,

$$(9) \qquad d\mathfrak{T} = \Sigma N\,d\varphi = d\varphi(\Sigma N) = C\,d\varphi,$$

ce qui s'énonce :

Théorème. — *Le travail élémentaire des forces appliquées à un corps solide tournant est égal au produit du couple par l'angle élémentaire de rotation* [1].

Il nous est maintenant facile d'appliquer le théorème des forces vives. On a

$$d\left(\frac{1}{2}\,I\,\omega^2\right) = C\,d\varphi = C\,\omega\,dt$$

ou, en faisant le calcul indiqué au premier membre,

$$I\,\omega\,d\omega = C\,\omega\,dt.$$

En divisant par $\omega\,dt$, on retrouve l'équation (7).

On peut aussi appliquer le théorème des forces vives pendant un intervalle de temps fini :

$$(10) \qquad \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} C\,d\varphi.$$

Si le couple C est une simple fonction de φ, il y a fonction de forces

$$(11) \qquad U = \int C\,d\varphi$$

---

[1] Cet angle doit, bien entendu, être évalué en radians.

et l'on peut écrire l'intégrale des forces vives :

$$\frac{1}{2}\omega^2 = U + h. \tag{12}$$

105. Applications diverses. — Nous allons maintenant indiquer quelques applications courantes des théories exposées ci-dessus.

Mouvement d'un système pesant dans le vide. — Les seules forces extérieures sont les poids des différents points du système. Elles ont une résultante appliquée au centre de gravité G et égale au poids total du système. Il s'ensuit, d'après le théorème du centre de gravité (n° 95), que G *décrit une parabole exactement comme si le système était réduit à un seul point.* Ceci est vrai, en particulier, pour un corps solide; mais, on a aussi la même propriété pour un système de plusieurs corps solides. Par exemple, si un obus éclatait dans le vide, en un certain point de sa trajectoire, le centre de gravité des éclats continuerait à décrire la même parabole qu'avant l'explosion [1].

Si l'on applique maintenant le théorème du moment cinétique par rapport au centre de gravité (n° 97), on voit que ce moment doit rester constant en grandeur et en direction. S'il est nul au début du mouvement, il le demeure indéfiniment. C'est ainsi que s'il s'agit d'un corps solide n'ayant primitivement aucune vitesse angulaire, la même propriété persiste [2], le corps solide garde une orientation invariable; il prend un mouvement de translation.

106. Mouvement des machines; volants. — Bornons-nous au cas simple d'une machine constituée par un *arbre*, sur lequel sont calées différentes pièces, tournant, en même temps que l'arbre, autour de l'axe A de ce dernier, avec une certaine vitesse angulaire ω. La machine est soumise à l'action d'un certain couple C_m, appelé *couple moteur*, qui tend à accélérer son mouvement et qui provient du fonctionnement du moteur (thermique, électrique, hydraulique, etc.) qui actionne la machine. Elle est soumise, en même temps, à un autre couple C_r, appelé *couple résistant* et de sens contraire au précédent.

---

[1] Dans l'air, ceci est complètement inexact, car les forces extérieures sont considérablement modifiées, par suite de la résistance de l'air, qui devient beaucoup plus grande.

[2] Car, s'il prenait une vitesse angulaire quelconque, il naîtrait un moment cinétique, d'après ce que nous avons vu au n° 103.

Ce couple résistant se compose lui-même, en général, de deux autres couples : l'un, C_u appelé *couple utile*, actionne les outils dont la machine a pour but d'assurer le fonctionnement ; l'autre, C_p appelé *couple des résistances passives*, provient des frottements et résistances développés dans les différents organes de la machine ; il croît en même temps que la vitesse angulaire.

Appelons I le moment d'inertie total de la machine par rapport à l'axe A. D'après l'équation (7), on a

$$(13) \qquad I\frac{d\omega}{dt} = C_m - C_r = C_m - C_u - C_p.$$

Si le couple moteur est juste égal au couple résistant, la vitesse angulaire reste constante ; on dit que la machine est à l'*état de régime*.

Si le couple moteur dépasse le couple résistant (ce qui arrive, par exemple, si les outils cessent de travailler), la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ est positive, la vitesse augmente ; on dit que *la machine s'emballe*. Il est à remarquer, d'ailleurs, que cet accroissement de vitesse a pour conséquence une augmentation du couple C_p, qui finit toujours par atteindre C_m et par réaliser de nouveau l'uniformité du mouvement. Toutefois, dans la pratique, comme les grandes vitesses ainsi atteintes pourraient être dangereuses, on évite cet emballement par l'emploi d'un *régulateur* (n° 171), qui a pour effet de diminuer automatiquement le couple moteur dès que la vitesse dépasse la vitesse de régime.

Enfin, si le couple moteur est inférieur au couple résistant (ce qui arrive, par exemple, si l'on supprime l'action du moteur), la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ est négative, la vitesse diminue et la machine finit par s'arrêter.

107. On arrive aux même conclusions si, au lieu de l'équation (13), on emploie l'équation des forces vives. Appelons T_m, T_u, T_p le *travail moteur*, le *travail utile* et le *travail des résistances passives* pendant un intervalle de temps quelconque (t_0, t_1). On a

$$(14) \qquad \frac{1}{2}I(\omega_1^2 - \omega_0^2) = T_m - T_u - T_p = T_m - T_r.$$

On voit que la nouvelle vitesse est supérieure ou inférieure à l'an-

cienne, suivant que le travail moteur est supérieur ou inférieur au travail résistant. Pour une valeur donnée de l'excès de travail, l'augmentation de vitesse est d'autant plus faible que I est plus grand. Il y a donc intérêt, pour accroître la régularité de la machine [1], à augmenter ce moment d'inertie. C'est ce qu'on fait en calant sur l'arbre une grosse roue appelée *volant*, dont le moment d'inertie est très grand, parce que la plus grande partie de la masse, qui se trouve dans la jante, est très éloignée de l'axe.

108. Puissance. — *La puissance* P *d'un moteur est le travail qu'il produit par unité de temps.* Lorsque la machine est en régime normal, il existe une relation très simple entre la puissance et le couple moteur. On a, en effet,

$$P\,dt = C_m\,d\varphi = C_m\,\omega\,dt\,;$$

d'où

$$(15)\qquad P = C_m\,\omega.$$

La puissance est égale au produit du couple moteur par la vitesse angulaire [2]. (Bien entendu, cette dernière doit être évaluée en radians.)

On appelle *puissance utile* P_u le travail utile par unité de temps. Le *rendement* de la machine est le rapport $r = \frac{P_u}{P_m}\cdot$ Il est toujours plus petit que 1, à cause du travail absorbé par les résistances passives.

109. Pendule composé. — Le pendule composé est constitué par un corps solide pesant pouvant tourner sans frottement autour d'un axe horizontal A, appelé *axe de suspension*.

Appelons a la distance du centre de gravité G à cet axe, φ l'angle que fait le plan vertical de l'axe avec le plan (A, G) et enfin I le moment d'inertie du pendule par rapport à A.

---

(1) Le volant a seulement pour rôle d'amoindrir les irrégularités périodiques ou passagères de la machine. Mais, s'il se produit une diminution persistante du couple résistant, il n'empêchera pas la machine de s'emballer; il ralentira seulement cet emballement. Le volant ne permet donc pas la suppression du régulateur.

(2) Ceci s'applique aussi dans le cas où la vitesse est variable; on obtient alors la *puissance au temps t*.

Pour obtenir l'équation du mouvement, on peut appliquer indifféremment le théorème du moment cinétique ou le théorème des forces vives. Appliquons ce dernier, ainsi que nous l'avons déjà fait pour le pendule simple (n° 81). Puisque nous supposons qu'il n'y a pas de frottements, la seule force qui travaille est le poids mg du corps solide. Il dérive d'une fonction de force, qui est égale à $mga\cos\varphi$. On a donc

(16) $$I\varphi'^2 = 2mga\cos\varphi + h \qquad (h = \text{const.}).$$

On retombe sur le même type d'équation que pour le pendule simple. On peut même identifier complètement les deux équations (abstraction faite des constantes d'intégration) en prenant l, dans l'équation (31) du n° 81, de telle manière que l'on ait

$$\frac{2mga}{I} = \frac{2g}{l}$$

ou

(17) $$l = \frac{I}{ma} = \frac{K^2}{a},$$

en appelant K le rayon de giration du pendule par rapport à A.

Ceci nous prouve que *tout pendule composé oscille de la même manière qu'un certain pendule simple, qui est appelé son pendule synchrone* et dont la longueur est donnée par la formule (17).

Si l'on appelle K′ le rayon de giration autour de l'axe parallèle à A mené par G, on sait (t. I, n° 184) que $K^2 = a^2 + K'^2$. En portant dans (17), il vient

(18) $$l = a + \frac{K'^2}{a}.$$

On voit que l est toujours $> a$. On appelle *axe d'oscillation* l'axe A′ parallèle à A, situé dans le plan (A, G), au delà de G et à la distance l de A. Sa distance a' à G est $l - a$, soit, d'après (18),

(19) $$a' = \frac{K'^2}{a},$$

ce qui s'écrit encore

(20) $$aa' = K'^2.$$

On voit que la relation qui lie a et a' est symétrique. Donc, *il y a réciprocité entre les axes de suspension et d'oscillation;* si l'on

suspend le pendule autour de A', la durée d'oscillation reste la même. C'est sur cette propriété que repose le *pendule de Kater*.

110. Mouvements oscillatoires d'un corps solide. — Imaginons un corps solide S qui peut tourner autour d'un axe fixe Oz, par rapport auquel il a un moment d'inertie que nous appelons I. Supposons qu'il existe une position d'équilibre et que si l'on écarte S de l'angle φ de cette position, il prenne naissance un couple égal à $-k\varphi$, k désignant un coefficient constant positif. Supposons, en outre, que les résistances passives aient pour effet de développer un couple égal à $-a\varphi'$, a désignant encore un coefficient constant positif. Appliquons le théorème du moment cinétique :

(21) $$I\varphi'' = -a\varphi' - k\varphi.$$

Nous retombons sur le type de l'équation (66) du n° 89. Nous allons donc obtenir un *mouvement oscillatoire amorti* ou *apériodique*, si $a > 0$, *harmonique*, si $a = 0$. Toutes les conclusions développées au n° 89 s'appliquent, sans modification, au cas actuel; nous n'y reviendrons pas.

CHAPITRE VIII.

LES UNITÉS EN MÉCANIQUE.

111. Unités fondamentales et unités dérivées. — Dans les Chapitres précédents, nous avons introduit différentes grandeurs, sans jamais nous préoccuper des unités qui servent à les mesurer. Cela n'a aucun inconvénient quand on se place à un point de vue purement théorique. Mais, dès qu'on envisage les applications pratiques, la question des unités devient, au contraire, fort importante.

Quand on introduit, dans une science expérimentale, une grandeur mesurable d'espèce entièrement nouvelle, c'est-à-dire ne pouvant être définie au moyen de grandeurs déjà connues, son unité ne peut être choisie qu'en fixant arbitrairement un étalon, auquel on convient de donner pour mesure un nombre déterminé, tel que 1, 100, 1000, etc. Une telle grandeur s'appelle *grandeur fondamentale* et l'unité correspondante est une *unité fondamentale*.

Il arrive, au contraire (et cela est beaucoup plus fréquent), qu'on introduise une grandeur nouvelle G' susceptible d'être définie au moyen de grandeurs G déjà connues et qui ont déjà leurs unités. Cette définition peut toujours se mettre sous la forme d'une équation et le seul fait d'écrire cette équation implique le choix de l'unité de la nouvelle grandeur. Il suffit, pour obtenir cette unité, de choisir les grandeurs G de telle manière que la mesure de G', tirée de *l'équation de définition*, ait pour valeur 1 (¹). Une grandeur telle que G' est appelée *grandeur dérivée* et son unité est une *unité dérivée*.

Il y a souvent plusieurs manières possibles de choisir l'équation de

(¹) Ceci est généralement possible d'une infinité de manières; mais on choisit, bien entendu, les valeurs numériques les plus simples pour les mesures des grandeurs G, si l'on veut obtenir l'énoncé le plus simple pour la définition de l'unité de G'. Mais, tous les énoncés sont évidemment équivalents.

définition et, en outre, quand on a choisi l'une d'elles, on est encore libre d'y introduire des coefficients numériques arbitraires ([1]). Dans la pratique, on s'arrange pour que les équations de définition offrent le maximum de simplicité. Pour ce qui concerne la Mécanique, notre choix est déjà fait; il résulte de toutes les équations écrites dans les Chapitres précédents, dont chacune peut servir d'équation de définition.

Il y a aussi une certaine part d'arbitraire dans le choix des grandeurs fondamentales. Rien n'empêcherait, par exemple, de substituer le volume à la longueur fondamentale de la Géométrie. De même, en Mécanique, suivant qu'on expose la Dynamique avant la Statique ou inversement, on est conduit à prendre comme grandeur fondamentale la masse ou la force, et, en fait, cela a donné naissance à deux systèmes différents d'unités, qui sont encore employés tous deux. On pourrait aussi adopter l'énergie, la masse et la force devenant alors toutes deux des grandeurs dérivées ([2]).

Suivant la manière de choisir les unités fondamentales, on aboutit à tel ou tel *système d'unités*. Nous verrons, un peu plus loin, quels sont les systèmes actuellement en usage.

112. Changement d'unités; dimensions; homogénéité. — Imaginons, pour fixer les idées, que l'on ait choisi trois grandeurs fondamentales (X), (Y), (Z) et soit (G) une grandeur dérivée. Tout en gardant les mêmes grandeurs fondamentales, supposons maintenant que l'on change leurs unités, les nouvelles unités étant respectivement X, Y, Z fois plus petites que les anciennes. La nouvelle unité de (G) devient, de ce fait, G fois plus petite et il est bien évident que le nombre G doit être une fonction déterminée des trois nombres X,

---

([1]) C'est ainsi que, pour définir l'accélération, on peut choisir l'une ou l'autre des deux formules

$$v = \gamma t, \qquad e = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

En outre, si l'on adoptait la seconde, on pourrait tout aussi bien y supprimer le facteur $\frac{1}{2}$; mais, on introduirait le facteur 2 dans la première.

([2]) Le nombre des grandeurs fondamentales constituant un système n'est pas nécessairement irréductible. On conçoit, en effet, que les progrès de la Science permettent de découvrir un jour un lien entre des grandeurs qui semblaient primitivement indépendantes, ainsi qu'il est arrivé pour la chaleur et le travail mécanique.

X, Y, Z, puisque la connaissance des unités fondamentales entraîne celle des unités dérivées. A chaque grandeur dérivée (G), correspond donc une certaine fonction

$$G = f(X, Y, Z), \tag{1}$$

qui est appelée son *symbole de dimensions* et *qui est le rapport dans lequel est réduite l'unité de cette grandeur quand les unités fondamentales sont réduites respectivement dans les rapports* X, Y, Z. Il revient au même de dire que *les mesures de grandeurs déterminées de l'espèce* (G), (X), (Y), *ou* (Z), *sont multipliées respectivement par les nombres* G, X, Y, Z [1].

---

[1] Nous vérifierons, dans tous les cas, que G est toujours de la forme $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$, α, β, γ désignant des exposants constants.

On peut le démontrer *a priori* de la manière suivante. Soit

$$g = F(x, y, z) \tag{1}$$

une relation devant exister entre les mesures x, y, z, g, quel que soit le système d'unités. (Ce sera, par exemple, l'équation de définition.) Si les unités fondamentales deviennent X, Y, Z fois plus petites, on a l'identité

$$gG = F(xX, yY, zZ). \tag{2}$$

Dérivons-la par rapport à x :

$$Gg'_x = F'_x(xX, yY, zZ)X ; \tag{3}$$

dérivons, de même, par rapport à X :

$$gG'_X = F'_x(xX, yY, zZ)x. \tag{4}$$

Divisons (4) par (3) :

$$\frac{G'_X}{G} = \frac{g'_x}{g}\frac{x}{X}. \tag{5}$$

Si nous donnons maintenant à x, y, z, des valeurs numériques quelconques, le second membre prend la forme $\frac{\alpha}{X}$, α étant une constante. Dès lors, en intégrant, il vient

$$G = X^\alpha \varphi(Y, Z). \tag{6}$$

En faisant les mêmes opérations pour y et z, on voit que

$$G = CX^\alpha Y^\beta Z^\gamma, \tag{7}$$

C étant une constante. Comme G doit être égal à 1, si X = Y = Z = 1, on en conclut que C = 1 ; donc,

$$G = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma. \tag{8}$$

C. Q. F. D.

De même qu'en Géométrie (t. II, n° 2), toutes les formules de la Mécanique, qui sont établies en laissant les unités arbitraires, doivent être *homogènes*. Soit, par exemple, une équation de la forme

$$(2) \qquad A + B + C = 0.$$

Si l'on réduit les unités fondamentales dans les rapports X, Y, Z, les termes A, B, C sont multipliés respectivement par leurs symboles de dimensions a, b, c. Or, si l'on veut que l'équation (2) soit indépendante du choix des unités, il faut que l'opération précédente la laisse invariante quels que soient X, Y, Z. Il en résulte que les trois symboles a, b, c doivent être identiques quels que soient X, Y, Z. Autrement dit, *dans n'importe quelle formule de Mécanique, les différents termes doivent avoir les mêmes symboles de dimensions.*

113. Ce *principe d'homogénéité* rend les mêmes services en Mécanique qu'en Géométrie; sa vérification fréquente dans les calculs compliqués sert de contrôle et permet quelquefois de déceler des erreurs. *Une faute d'homogénéité est toujours une faute grave.*

Il permet aussi de calculer facilement les symboles de dimensions des différentes grandeurs dérivées. Si l'on veut, par exemple, le symbole de la grandeur (G), il suffit de prendre une formule quelconque, où ne figurent que cette grandeur et d'autres grandeurs dont on connaît déjà les symboles. En égalant les symboles de deux termes quelconques de cette formule, on obtient une égalité d'où l'on peut tirer le symbole cherché G [1].

Pour déterminer pratiquement le symbole de dimensions d'un terme monome quelconque

$$(3) \qquad A = k u^p v^q w^r,$$

où k désigne un certain facteur numérique et où u, v, w représentent des grandeurs dont on connaît les symboles U, V, W, il suffit de remplacer, au second membre, les lettres u, v, w par les symboles

---

[1] Il n'y aurait exception que si G se trouvait en facteur, avec le même exposant, dans tous les termes de la formule, autrement dit si la formule proposée se trouvait, par hasard, être homogène par rapport à la grandeur (G).

correspondants, en négligeant le facteur numérique k. En effet, dans un changement d'unités quelconque, les nombres que représentent les lettres u, v, w sont respectivement multipliés par U, V, W; il s'ensuit évidemment que A est multiplié par $U^p V^q W^r$ et cela justifie bien notre règle pratique.

114. Systèmes usités. — On utilise actuellement en France trois systèmes différents d'unités.

Système C. G. S. — Les grandeurs fondamentales sont : *longueur*, *temps*, *masse* [1].

L'unité de longueur est le *centimètre*, qui est la centième partie de la longueur à 0° du mètre étalon, conservé dans les caveaux du pavillon de Breteuil, à Sèvres.

L'unité de temps est la *seconde*, qui est la fraction $\frac{1}{86400}$ du jour solaire moyen.

L'unité de masse est le *gramme*, qui est la millième partie du kilogramme étalon, également conservé au pavillon de Breteuil.

Nous passerons en revue les unités dérivées, en même temps que celles des deux autres systèmes, au n° **115**.

Système M. T. S. — Il n'existe officiellement que depuis la loi du 4 avril 1919. Ses grandeurs fondamentales sont les mêmes que pour le système C. G. S.; mais, les unités ont été choisies de manière à les rendre plus pratiques pour les usages industriels.

L'unité de temps n'est pas changée. L'unité de longueur est le *mètre*, qui vaut 100 centimètres. Enfin, l'unité de masse est la *tonne*, qui vaut 1000 fois le kilogramme étalon et, par conséquent, 1000000 de grammes.

Système M. K. S. — Les grandeurs fondamentales sont : *longueur*, *temps*, *force*.

L'unité de longueur est le *mètre* et l'unité de temps est toujours la *seconde*. Quant à l'unité de force, c'est le *kilogramme-poids* ou *kilogramme-force*, c'est-à-dire le poids à Paris du kilogramme-masse. Elle offre théoriquement le grave inconvénient de ne pas être

(1) En Géométrie, on n'utilise que la première; en Cinématique, on utilise la première et la seconde; en Dynamique et en Statique, on les utilise toutes les trois.

transportable, car, l'accélération de la pesanteur n'étant pas la même partout, le poids du kilogramme étalon change quand on le déplace à la surface de la Terre ([1]).

C'est pourquoi le système M. K. S. n'est jamais employé dans les mesures scientifiques. Mais, pour les mesures industrielles, qui n'exigent pas, en général, une très grande précision, cet inconvénient n'existe pas, car l'on considère comme négligeables les petites variations de g et l'on prend pour unité de force le poids du kilogramme-masse en un lieu quelconque de la Terre ([2]).

115. Nous allons maintenant passer en revue les différentes grandeurs de la Mécanique et donner, pour chacune d'elles, la définition de l'unité dans les trois systèmes ci-dessus. Nous calculerons également les dimensions, en prenant toujours comme grandeurs fondamentales la masse, la longueur et le temps.

Longueur. — Unité : *centimètre* en C. G. S.; *mètre* en M. T. S. et M. K. S.

Symbole de dimensions : L.

Surface. — Unité : carré construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire cm^2 en C. G. S. et m^2 en M. T. S. et M. K. S.

Symbole de dimensions : L^2.

Volume. — Unité : cube construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire cm^3 en C. G. S. et m^3 en M. T. S. et M. K. S.

Dimensions : L^3.

Angle. — Unité : radian = angle au centre correspondant à un arc égal au rayon. On se sert aussi du degré et du grade, qui valent respectivement $\frac{\pi}{180}$ et $\frac{\pi}{200}$ radians.

([1]) Si, par exemple, on le suspend à un peson à ressort, la division marquée change, suivant le lieu de l'expérience.

([2]) Malgré ses inconvénients théoriques, le système M. K. S. est presque exclusivement employé en Mécanique industrielle et le sera sans doute encore longtemps, malgré les efforts des savants pour faire adopter un système plus rationnel. Cela tient à ce que la notion statique de force est beaucoup plus répandue que la notion dynamique. Tout le monde sait se représenter une force de 1^{kg}, tandis que peu de gens peuvent se représenter la sthène, pour cette bonne raison que le public ne possède pas la notion d'accélération.

Dimensions : 1. — La valeur d'un angle en radians est, en effet, indépendante de l'unité de longueur, puisque c'est le quotient de l'arc par le rayon.

Temps. — Unité : la *seconde* dans tous les systèmes.

Symbole de dimensions : T.

Vitesse. — Prenons pour équation de définition la formule du mouvement uniforme

$$(4) \qquad e = vt.$$

Pour $e = 1$ et $t = 1$, on a $v = 1$. Donc, l'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile qui parcourt, d'un mouvement uniforme, l'unité de longueur pendant l'unité de temps. Les vitesses sont, par suite, exprimées en *cm. par sec.* dans le système C. G. S et en *m. par sec.* dans les deux autres systèmes.

Dimensions : Appliquons la règle générale donnée au n° 113, en nous servant de l'équation (4); nous avons

$$L = VT;$$

d'où nous tirons le symbole cherché :

$$(5) \qquad V = LT^{-1}.$$

Accélération. — Prenons pour équation de définition la formule du mouvement uniformément varié :

$$(6) \qquad v = \gamma t.$$

En y faisant $v = t = 1$, nous voyons que l'unité d'accélération est l'accélération d'un mouvement uniformément varié, dont la vitesse s'accroît d'une unité par unité de temps. Les accélérations sont donc exprimées en *cm. par sec. par sec.* dans le système C. G. S et en *m. par sec. par sec.* dans les deux autres systèmes.

Dimensions : En se servant des formules (6) et (5), nous avons

$$(7) \qquad \Gamma = \frac{V}{T} = LT^{-2}.$$

Vitesse angulaire. — Prenons pour équation de définition la formule de la rotation uniforme

$$(8) \qquad \theta = \omega t.$$

En y faisant $\theta = t = 1$, nous voyons que l'unité de vitesse angulaire est la vitesse angulaire d'un corps solide qui tourne uniformément d'un *radian par seconde*.

On exprime aussi quelquefois les vitesses angulaires en degrés ou en grades par seconde. Dans l'industrie, les vitesses de rotation sont presque toujours évaluées en *nombre de tours par minute*. Lorsqu'on a des données de cette sorte, *il faut toujours les transformer en radians par seconde*, si l'on doit les utiliser dans des calculs où interviennent d'autres éléments, tels que des vitesses linéaires, moments cinétiques, forces vives, etc. Ce n'est, en effet, qu'à cette condition que l'on peut écrire la formule $v = r\omega$, qui donne la vitesse linéaire en fonction de la vitesse angulaire.

Dimensions : D'après (8), le symbole de dimensions est

$$\Omega = \frac{1}{T} = T^{-1}. \tag{9}$$

Vitesse aréolaire. — Prenons la formule

$$S = at, \tag{10}$$

qui donne l'aire balayée dans un mouvement obéissant à la loi des aires. Nous en concluons que la vitesse aréolaire a s'exprime en *cm² par sec.* en C. G. S. et en *m² par sec.* dans les deux autres systèmes.

Dimensions :

$$A = L^2 T^{-1}. \tag{11}$$

Masse. — Unité : *gramme* en C. G. S., *tonne* en M. T. S. Dans le système M. K. S., elle nous est donnée par la formule

$$p = mg, \tag{12}$$

qui relie le poids à la masse. Pour avoir $m = 1$, il faut prendre $p = g = 9{,}81$. Donc, *l'unité de masse est la masse d'un corps qui pèse, à Paris*, $9^{kg},81$. Elle vaut 9,81 fois la masse du kilogramme étalon.

Dans la pratique, pour évaluer la masse d'un corps dans le système M. K. S., on calcule son poids en kilogrammes et on le divise par $g = 9{,}81$.

Dimensions : Le symbole est M.

Masse spécifique, poids spécifique, densité. — La *masse spéci-*

fique d'un corps homogène est la *masse de l'unité de volume de ce corps*. Si on la désigne par μ, la masse m d'un corps de volume v est donnée par la formule

$$m = \mu v.$$

On en déduit que le symbole de dimensions de la masse spécifique est ML^{-3}.

Le *poids spécifique* ϖ est, de même, le poids de l'unité de volume. Le poids d'un volume v est

$$p = \varpi v.$$

On en déduit le symbole de dimensions de ϖ : $ML^{-2}T^{-2}$.

On a, entre μ et ϖ, la relation

$$\varpi = \mu g. \tag{13}$$

On appelle *densité* d'un corps le rapport entre les masses ou les poids de volumes égaux de ce corps et d'eau distillée à 4°. Son symbole de dimensions est 1, de sorte que la densité est indépendante du choix des unités. C'est pourquoi, dans la pratique, on l'emploie de préférence à la masse spécifique ou au poids spécifique. Si on la désigne par d, on a d'ailleurs les relations évidentes

$$\mu = d, \text{ en C. G. S. et M. T. S.;}$$
$$\varpi = 1000 d, \text{ en M. K. S.}$$

Dans le système M. K. S., le poids d'un corps est égal à 1000 fois le produit de son volume par sa densité. Si l'on veut qu'il soit égal à ce produit, il faut évaluer le volume en dm^3, c'est-à-dire prendre le décimètre pour unité de longueur. Il n'y a à cela aucun inconvénient, si les longueurs n'ont pas à intervenir autrement. Mais cela peut, au contraire, conduire à des erreurs, si les longueurs servent à autre chose qu'à mesurer le volume, comme il arrive, par exemple, dans l'évaluation des moments d'inertie. Dans ce cas, l'unité de longueur doit être le décimètre pour le calcul des volumes et le mètre pour tous les autres calculs. Il y a là une difficulté qu'il vaut mieux éviter en gardant le mètre pour unité unique et se rappelant que le poids du mètre cube d'eau est 1000^{kg}.

Quantité de mouvement. — Son unité résulte des unités de masse et de vitesse : nous laissons au lecteur le soin de la définir dans

les trois systèmes. Son symbole de dimensions est

(14) $$MV = MLT^{-1}.$$

Moment cinétique. — C'est le produit d'une quantité de mouvement par une longueur. Le lecteur en définira l'unité. Retenons seulement les dimensions

(15) $$MVL = ML^2T^{-1}.$$

Force. — Prenons comme équation de définition

(16) $$f = m\gamma.$$

En faisant $m = \gamma = 1$, nous voyons que l'unité de force est *la force qui donne à l'unité de masse l'unité d'accélération.* En C. G. S., elle donne à un gramme une accélération de 1^{cm} par sec. par sec.; on l'appelle la *dyne*. En M. T. S., elle donne à une tonne une accélération de 1^m par sec. par sec.; on l'appelle la *sthène*.

Dans le système M. K. S., l'unité de force est le *kilogramme-poids*.

Dimensions : Elles nous sont données par la formule (16) :

(17) $$F = M\Gamma = MLT^{-2}.$$

Couple ou *moment.* — C'est le produit d'une force par une longueur. On l'évalue en *dyne-centimètres* en C. G. S., en *sthène-mètres* en M. T. S. et en *kilogrammètres* en M. K. S. Ses dimensions sont

(18) $$FL = ML^2T^{-2}.$$

Travail. — Prenons comme équation de définition la formule

(19) $$\mathcal{T} = Fl,$$

qui donne le travail d'une force dont le point d'application se déplace suivant sa propre direction. En faisant $F = l = 1$, nous voyons que l'unité de travail est le *travail de l'unité de force pour un déplacement égal à l'unité de longueur.*

En C. G. S., c'est le travail d'une dyne pour un déplacement de 1^{cm}; on l'appelle l'*erg*. En M. T. S., c'est le travail d'une sthène pour un déplacement de 1^m; on l'appelle le *kilojoule*. En M. K. S., c'est le travail d'un kilogramme-poids pour un déplacement de 1^m; on l'appelle le *kilogrammètre*.

Dimensions : Elles sont données par la formule (19) :

$$\mathfrak{C} = ML^2T^{-2}. \tag{20}$$

Ce sont les mêmes que les dimensions d'un couple, et cela est bien conforme à la règle qui donne le travail d'un couple appliqué à un corps tournant, puisque ce travail est égal au produit du couple par l'angle de rotation, lequel a pour symbole de dimensions 1.

L'unité de couple n'est, au fond, pas différente de l'unité de travail et l'on peut évaluer un couple en ergs, kilojoules ou kilogrammètres.

Force vive ou *énergie.* — Nous savons (n° 64) que la variation de demi-force vive est un travail. Il est donc naturel de prendre pour unité d'énergie (ou demi-force vive) l'unité de travail, c'est-à-dire l'*erg*, le *kilojoule* ou le *kilogrammètre*.

Comme vérification, les dimensions doivent être les mêmes que celles de la formule (20). Effectivement, on a bien

$$MV^2 = ML^2T^{-2}. \tag{21}$$

Puissance. — On a

$$\mathfrak{C} = Pt. \tag{22}$$

On en déduit que l'unité de puissance est la puissance d'un moteur qui produit une *unité de travail par seconde*, c'est-à-dire un erg par seconde en C. G. S., un kilojoule par seconde en M. T. S. et un kilogrammètre par seconde en M. K. S. L'unité M. T. S. s'appelle le *kilowatt*.

Dimensions : D'après la formule (22), le symbole de dimensions est

$$P = ML^2T^{-3}. \tag{23}$$

On arrive au même résultat, en se rappelant que la puissance d'un moteur est égale au produit de son couple par sa vitesse angulaire et en appliquant les formules (18) et (9).

Moment d'inertie. — Contentons-nous de donner les dimensions

$$I = ML^2. \tag{24}$$

En multipliant par Ω^2, on retrouve le symbole de dimensions de l'énergie cinétique.

116. Tableau récapitulatif. — Nous donnons ci-dessous un Tableau récapitulatif, indiquant les noms, les grandeurs relatives et les symboles de dimensions des différentes unités. Nous signalons en même temps quelques *unités pratiques*, qui sont souvent employées, au lieu de l'unité absolue, pour des raisons de commodité dans les calculs numériques, par exemple pour éviter l'emploi de nombres trop grands ou trop petits.

Pour l'évaluation des rapports d'unités, le plus simple est de se servir des symboles de dimensions. Pour le passage du système M. T. S. au système C. G. S., il faut prendre $L = 10^2$, $M = 10^6$. Pour le passage inverse, on prend évidemment les valeurs inverses. Pour le passage du système M. K. S. au système C. G. S., on a $L = 10^2$ et $M = 9810$.

Nom de la grandeur.	Nom de l'unité.	Valeur en C. G. S.	Valeur en M. T. S.	Valeur en M. K. S.	Symbole de dimensions.
Longueur...	Centimètre.........	1	10^{-2}	10^{-2}	L
	Mètre..............	10^2	1	1	
Temps......	Seconde............	1	1	1	T
Masse.......	Gramme............	1	10^{-6}	$\frac{1}{9810}$	M
	Tonne..............	10^6	1	$\frac{10^3}{9,81}$	
	Kilogramme........	10^3	10^{-3}	$\frac{1}{9,81}$	
Vitesse......	Centim. par sec.....	1	10^{-2}	10^{-2}	LT^{-1}
	Mètre par sec.......	10^2	1	1	
	Kilom. à l'heure....	$\frac{1000}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	
Accélération.	Cm. par sec. par sec..	1	10^{-2}	10^{-2}	LT^{-2}
	M. par sec. par sec..	10^2	1	1	
Vitesse angulaire......	Rad. par sec........	1	1	1	T^{-1}
	Tours par min......	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{30}$	
Force.......	Dyne..............	1	10^{-8}	$\frac{1}{981000}$	MLT^{-2}
	Sthène.............	10^8	1	$\frac{100}{0,981}$	
	Kilogramme........	981000	0,00981	1	

Nom de la grandeur.	Nom de l'unité.	Valeur en C. G. S.	Valeur en M. T. S.	Valeur en M. K. S.	Symbole de dimensions.
Travail......	Erg................	1	10^{-10}	$\frac{1}{9,81}10^{-7}$	ML^2T^{-2}
	Kilojoule...........	10^{10}	1	$\frac{1000}{9,81}$	
	Kilogrammètre.....	$9,81 \times 10^7$	0,00981	1	
	Joule...............	10^7	10^{-3}	$\frac{1}{9,81}$	
	Kilowatt-heure.....	36×10^{12}	3600	367×10^3	
Puissance...	Erg par sec.........	1	10^{-10}	$\frac{1}{9,81}10^{-7}$	ML^2T^{-3}
	Kilowatt...........	10^{10}	1	$\frac{1000}{9,81}$	
	Kilogrammᵗʳᵉ par sec..	$9,81 \times 10^7$	0,00981	1	
	Watt...............	10^7	10^{-3}	$\frac{1}{9,81}$	
	Cheval-vapeur......	736×10^7	0,736	75	
	H. P. (horse-power).	745×10^7	0,745	76	
	Poncelet...........	$9,81 \times 10^9$	0,981	100	

117. Conseils pratiques pour les calculs numériques. — Dans les applications, il arrive fréquemment que les données sont évaluées au moyen d'unités pratiques diverses. Par exemple, on donnera la longueur d'un arbre de transmission en mètres et son diamètre en millimètres. On donnera sa vitesse angulaire en tours par minute et la puissance transmise en chevaux. On donnera un effort tangentiel en kilogrammes ou bien en tonnes, etc.

On peut évidemment garder ces données telles quelles pour les introduire dans les calculs, quitte à corriger les formules ordinaires de la Mécanique par l'adjonction de facteurs numériques convenables, dont le rôle est de tenir compte de la non-concordance des unités employées avec les équations de définition. Mais, cette manière de procéder exige une attention continuelle et peut occasionner facilement des erreurs. Aussi, croyons-nous préférable d'opérer de la manière suivante :

On choisit un système d'unités absolues : C. G. S., M. T. S. ou M. K. S., se rapprochant le plus possible des unités pratiques qui servent à évaluer les données. Puis, on transforme ces dernières dans le système choisi. On fait ensuite les calculs demandés. Enfin, on transforme les résultats en unités pratiques.

Quelle que soit la manière de procéder, il est toujours prudent de

se rendre compte a priori de l'ordre de grandeur des différents nombres que l'on calcule, en arrondissant grossièrement les données. Cela permet d'éviter les erreurs ridicules auxquelles on s'expose quand on fait les calculs mécaniquement, sans les soumettre au contrôle du bon sens. Cette évaluation de l'ordre de grandeur est d'ailleurs à chaque instant nécessaire, quand on emploie la règle à calculs, puisque cet instrument ne donne les résultats des opérations qu'à une puissance de 10 près.

CHAPITRE IX.

STATIQUE.

118. Équilibre. — Soit un système S de points matériels, soumis, par rapport à un trièdre de référence déterminé, à une loi de forces et à des liaisons données, que nous supposons indépendantes du temps. On dit qu'une position (¹) particulière Σ est une *position d'équilibre* si le système y demeure indéfiniment quand on l'y abandonne sans aucune vitesse initiale.

On dit que l'équilibre est *stable* si S reste constamment dans le voisinage de Σ (²), quelles que soient les conditions initiales, pourvu que les vitesses initiales soient suffisamment petites et la position initiale suffisamment voisine de Σ.

L'équilibre est dit *instable* dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'on peut trouver une position initiale aussi voisine qu'on le veut de Σ et des vitesses initiales aussi petites qu'on le désire, telles que S s'écarte d'une quantité finie de Σ dans la suite du mouvement.

La recherche des positions ou des conditions d'équilibre fait l'objet de la *Statique*. Quant à l'étude de la stabilité, elle rentre dans le domaine de la Dynamique et constitue quelquefois une question fort difficile. Toutefois, dans bien des applications pratiques, on peut se contenter d'un raisonnement intuitif plus ou moins rigoureux pour reconnaître qu'une position d'équilibre est stable ou instable.

Théorème. — *Dans une position d'équilibre, la force relative appliquée à chaque point du système est nulle et réciproquement.*

(¹) Nous entendons ici le mot *position* dans le sens large de position et configuration, pour le cas où l'on a affaire à un système déformable.

(²) Ceci veut dire que chaque point de S doit rester voisin du point correspondant de Σ.

La condition est évidemment nécessaire, car lorsque le système reste au repos, chacun de ses points a une accélération nulle, donc une force relative nulle.

Elle est également *suffisante*, car si elle est remplie pour Σ, les équations différentielles du mouvement sont vérifiées quand on suppose que S reste indéfiniment en Σ. En outre, les conditions initiales sont également satisfaites, si l'on suppose que la position initiale est Σ et que les vitesses initiales sont nulles. Or, on sait qu'il n'y a qu'une solution possible remplissant toutes ces conditions. Donc, S reste nécessairement en Σ.

119. Théorème des travaux virtuels. — Le théorème précédent ne serait pas d'une application commode dans la pratique, surtout quand on a affaire à un système constitué par un milieu continu, comme il arrive presque toujours. Ce sont surtout ses conséquences qui sont utilisées et que nous allons maintenant développer.

Imaginons un petit déplacement de S à partir de Σ, tel que la nouvelle position S′ obéisse toujours aux liaisons générales imposées au système. Un tel déplacement élémentaire est appelé *déplacement virtuel*. On l'appelle ainsi parce que ce n'est pas un déplacement *réel* pris effectivement par le système ; il est purement fictif et arbitraire, sous la seule condition d'être *compatible avec les liaisons*.

Considérons maintenant la somme algébrique des travaux élémentaires des différentes forces appliquées au système, correspondant à ce déplacement. C'est ce qu'on appelle le *travail virtuel*. On a le théorème suivant :

Théorème (*des travaux virtuels*). — *Pour que la position Σ soit une position d'équilibre, il faut et il suffit que le travail virtuel soit nul, quel que soit le déplacement virtuel.*

La condition est évidemment nécessaire, d'après le théorème du n° 118, car, s'il y a équilibre, la force totale appliquée à chaque point est nulle, donc aussi son travail.

Démontrons maintenant qu'elle est suffisante. Supposons-la remplie et montrons que S ne peut pas se mettre en mouvement, si on l'abandonne sans vitesses initiales dans la position Σ. Si un mouvement quelconque prenait naissance, au bout d'un temps t infiniment petit, le système aurait une énergie cinétique non nulle, et

comme, au temps zéro, cette énergie est nulle, elle aurait certainement subi un accroissement positif. D'après le théorème des forces vives, le travail élémentaire des forces appliquées au système serait donc positif. Or, le déplacement réel qu'aurait subi S ferait nécessairement partie des déplacements virtuels possibles et l'on aboutirait ainsi à un travail virtuel particulier qui ne serait pas nul, contrairement à l'hypothèse ([1]).

Remarque. — Cette démonstration nous prouve que, lorsqu'il n'y a pas équilibre, le mouvement que prend le système est tel que *le travail commence par être positif*. Par exemple, s'il y a une fonction des forces, *cette fonction commence par augmenter.*

Dans le cas où le système ne dépend que d'un seul paramètre (on dit alors qu'il est *à liaisons complètes*), cette remarque suffit pour prévoir le sens dans lequel commence nécessairement le mouvement.

120. *Cas où il y a une fonction de forces.* — Lorsqu'il y a une fonction des forces U, le travail virtuel est la différentielle totale de cette fonction. Dans une position d'équilibre, cette différentielle doit donc être identiquement nulle, quelles que soient les différentielles des variables indépendantes dont dépend le système. Cela revient à dire que *les dérivées partielles de* U par rapport à ces variables *doivent toutes être nulles.* Ceci arrive, en particulier, lorsque U est maximum ou minimum.

Signalons, à ce propos, le théorème suivant, qui rend souvent des services dans les applications.

([1]) Si l'on veut que cette démonstration soit entièrement rigoureuse, il faut tenir compte des ordres d'infinitude. Quand nous disons que le travail virtuel élémentaire est nul, cela signifie qu'il est nul, au second ordre près par rapport aux déplacements. Or, ces derniers sont au moins du second ordre par rapport à t, parce que les vitesses initiales sont nulles. Donc, le travail au temps t est nul, au quatrième ordre près par rapport à t.

D'autre part, si l'une des forces f n'était pas nulle au temps o, le point M auquel elle est appliquée prendrait, au temps t, la vitesse ft, au second ordre près, ainsi qu'on le voit en appliquant les équations intrinsèques et s'appuyant toujours sur l'hypothèse que la vitesse initiale est nulle. On aurait alors, au temps t, une énergie cinétique égale à $\left(\frac{1}{2}\sum mf^2\right)t^2$, au troisième ordre près par rapport à t. Elle serait du second ordre, tandis que le travail serait au moins du quatrième ordre. Il est donc nécessaire que toutes les forces f soient nulles. On est alors ramené au théorème du n° 118.

Théorème. — *Lorsque la fonction des forces est maximum (ou le potentiel minimum), la position d'équilibre est stable.*

On peut se rendre compte, *grosso modo*, de la raison d'être de cette proposition, en remarquant que si l'on écarte S infiniment peu de la position Σ considérée et si on l'abandonne ensuite sans vitesse initiale, U doit augmenter, en vertu de la remarque faite à la fin du numéro précédent; or, cela n'est possible que si S se rapproche de Σ, car U diminue quand S s'éloigne de Σ.

Voici maintenant une démonstration rigoureuse.

Nous supposerons, pour simplifier, que S ne dépend que de trois paramètres x, y, z. Notre démonstration s'appliquerait dans le cas d'un nombre quelconque n de paramètres; mais la représentation géométrique ci-dessous se ferait dans l'espace à n dimensions.

Nous représenterons la position de S par le point $M(x, y, z)$, rapporté à un système d'axes quelconques. Nous supposerons que les valeurs de x, y, z qui rendent U maximum sont o, o, o et que ce maximum est nul, résultats qu'on peut toujours obtenir par un changement de variables. A la position Σ, correspond alors l'origine O. Il faut démontrer que, si M_0 est suffisamment voisin de O et si les vitesses initiales sont assez petites, M reste indéfiniment voisin de O.

A cet effet, considérons l'intégrale des forces vives

$$T = U + h, \tag{1}$$

la constante h étant donnée par

$$h = T_0 - U_0. \tag{2}$$

Le premier membre de (1) est $\geqq 0$; il en est donc de même du second et l'on peut affirmer que, pendant toute la durée du mouvement, on a

$$U + h \geqq 0. \tag{3}$$

Le point M reste donc indéfiniment dans le domaine défini par cette inégalité.

Or, du fait que U est maximum et nul au point O, on peut conclure que $U \geqq -k$ à l'intérieur d'une surface fermée (s_k) entourant O et tendant à se réduire à ce point quand k tend vers zéro [1], la valeur de U sur (s_k) étant

[1] On peut démontrer rigoureusement cette propriété intuitive de la manière suivante. Considérons une sphère A, de centre O et de rayon r. La définition du maximum de U nous apprend que si r est assez petit, U est négatif sur la surface de cette sphère. Soit $-a$ sa plus grande valeur algébrique, a étant un nombre certainement > 0 et qui tend vers zéro, en même temps que r, si l'on suppose que U est une fonction continue.

Cela posé, considérons une demi-droite $O\lambda$ quelconque issue de O. Si M part de O,

juste égale à $-k$. Soit alors ε un nombre positif donné à l'avance et aussi petit qu'on veut. Choisissons M_0 à l'intérieur de $\left(s_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$ et choisissons en outre les vitesses assez petites pour que $T_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après (2), nous aurons alors

$$(4) \qquad h < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Je dis que M reste indéfiniment à l'intérieur de la surface (s_ε). En effet, il est, au temps zéro, à l'intérieur de cette surface, puisqu'il est à l'intérieur de $\left(s_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$. S'il en sortait, il la traverserait à un certain moment, puisque sa trajectoire est continue. A ce moment, on aurait $U = -\varepsilon$ et, par conséquent, d'après (3), $h \geqq \varepsilon$, ce qui est contradictoire avec (4).

Si nous nous reportons maintenant à (1), comme nous savons que U reste compris entre o et $-\varepsilon$, nous pouvons affirmer que T reste $\leqq h < \varepsilon$. Donc, les vitesses des différents points de S restent infiniment petites, si ε est infiniment petit. La stabilité est démontrée.

Application à un système pesant. — Si z désigne la cote du centre de gravité, l'axe Oz étant la verticale descendante, la fonction des forces est Pz, en appelant P le poids total. Le théorème précédent nous apprend alors que le système est *en équilibre stable, lorsque son centre de gravité est le plus bas possible.*

121. *Cas du mouvement permanent.* — Il est quelquefois commode d'envisager l'extension suivante du théorème des travaux virtuels.

Imaginons que le système S ait un mouvement tel que chacun de ses points garde une vitesse de grandeur constante, comme il arrive, par exemple, pour une machine qui tourne d'un mouvement uniforme. On dit alors que le système est à l'état de *mouvement* ou de *régime permanent.* Son énergie cinétique reste constante; donc, le

---

en suivant cette demi-droite, U varie d'une manière continue, en partant de la valeur o pour atteindre, sur A, une valeur $\leqq -a$. Si $k < a$, U passe donc, au moins une fois, par la valeur $-k$. Soit P le premier point pour lequel cela arrive. Sur le segment OP, $U > -k$ et, en P, $U = -k$. Si l'on fait maintenant pivoter $O\lambda$ autour de O, le point P engendre une surface (s_k) intérieure à A. A l'intérieur de cette surface, $U > -k$ et sur son contour, $U = -k$. D'autre part, si k tend vers zéro, on peut supposer qu'il en est de même de a; donc, r tend aussi vers zéro. La sphère A et, par suite, la surface (s_k), qui lui est intérieure, tendent donc à se réduire au point O. La surface (s_k) jouit bien de toutes les propriétés annoncées.

travail élémentaire réel des forces qui lui sont appliquées est nul à chaque instant.

Cette proposition, qui n'est qu'un cas particulier du théorème des forces vives, ne nous permet pas d'affirmer que tous les travaux virtuels possibles à chaque instant sont nuls, puisqu'il ne s'agit que du travail réel correspondant au déplacement réel du système. Cette affirmation n'est légitime que si le système dépend d'un seul paramètre, parce qu'il n'existe qu'un seul déplacement virtuel, qui correspond à l'accroissement infiniment petit de ce paramètre. Il n'y a donc qu'un seul travail virtuel et il ne peut pas différer du travail réel. Dans ce cas, *les conditions que doivent remplir les forces pour qu'il y ait régime permanent sont exactement les mêmes que les conditions d'équilibre.*

122. Systèmes sans frottement. — Les forces appliquées à un système comprennent les forces données, qui sont connues et les réactions extérieures ou intérieures, qui ne le sont pas. Dans l'application du théorème des travaux virtuels (comme des forces vives, n° 73), il faut tenir compte des unes et des autres.

On dit que *le système est sans frottement lorsque le travail virtuel des réactions est nul quel que soit le déplacement virtuel envisagé.* Cette définition est bien conforme avec celle que nous avons donnée dans le cas particulier d'un point assujetti à se déplacer sur une courbe ou sur une surface fixe (*cf.* n° 71). Lorsque le système est sans frottement, *on a le droit d'appliquer le théorème des travaux virtuels* (de même que le théorème des forces vives, n° 71) sans s'occuper des réactions, puisque celles-ci donneraient à coup sûr un travail nul.

On obtient ainsi des équations qui ne renferment pas d'autre inconnue que les paramètres qui déterminent la position du système. Le nombre de ces équations (distinctes) est d'ailleurs égal au nombre n de ces paramètres. On obtient, en effet, n déplacements virtuels indépendants en supposant successivement qu'on donne un petit accroissement à chacun des paramètres, les autres demeurant constants. Tout autre déplacement est une combinaison linéaire des précédents [1] et donne une équation qui est une combinaison

---

[1] Si p, q, r, ... désignent les paramètres, les coordonnées d'un point quel-

linéaire des n équations distinctes fournies par les déplacements particuliers ci-dessus. Le théorème des travaux virtuels conduit donc toujours, dans le cas des systèmes sans frottement, à un nombre d'équations égal au nombre des inconnues. Il s'ensuit que le nombre des positions d'équilibre est limité [1]. Leur recherche dépend de la résolution d'un certain système d'équations finies et ne comporte aucune intégration. Au point de vue de l'Analyse, la Statique est donc beaucoup plus simple que la Dynamique.

123. Systèmes avec frottement. — *Lorsque le système a du frottement*, on admet, comme un fait expérimental, que *le travail réel des réactions est toujours négatif ou nul.* Cela est vérifié (n° 73) dans le cas particulier d'un point sur une courbe ou sur une surface fixe, en vertu de la première loi du frottement de glissement. On peut le vérifier aussi dans le cas du frottement de deux corps solides (n° 133). Et ce sont là les seuls cas dont nous ayons à nous occuper. Ce principe ne diffère pas d'ailleurs du principe général de la *dégradation de l'énergie*, en vertu duquel l'énergie mécanique (cinétique ou potentielle) ne se conserve pas là où il y a frottement et se transforme en chaleur.

Si l'on applique le théorème des travaux virtuels en négligeant les réactions, on obtient encore des positions d'équilibre. Si l'on se reporte, en effet, à la démonstration du n° 119, on constate que l'hypothèse contraire conduirait à l'existence d'un travail réel positif des réactions, ce que ne permet pas le principe ci-dessus.

Mais, ces positions particulières ne sont pas les seules possibles. Il en existe toujours une infinité d'autres, ainsi que nous le verrons plus loin (n° 131), qui constituent, en quelque sorte, des *régions d'équilibre*. La délimitation de ces régions ne peut pas se faire par le théorème des travaux virtuels. Elle exige l'étude de chaque réaction particulière, qui doit obéir aux lois expérimentales du frot-

---

conque M du système sont des fonctions déterminées de ces variables. Les composantes dx, dy, dz du déplacement élémentaire de M pour un déplacement virtuel quelconque du système sont les différentielles totales de ces fonctions; ce sont donc des fonctions linéaires de dp, dq, dr, ...

[1] D'une manière plus précise, ces positions ne dépendent d'aucun paramètre arbitraire.

tement au repos, dont il sera parlé plus loin (n° 129). On est alors obligé d'avoir recours à une autre méthode générale de Statique, qui est ordinairement plus compliquée et que nous allons maintenant exposer.

124. Les six équations universelles d'équilibre. — Théorème. — *Étant donné un système quelconque en équilibre, les forces extérieures qui lui sont appliquées forment un système de vecteurs équivalent à zéro.*

Cela est évident, d'après le théorème du n° 118, pour le système formé par *toutes* les forces. Or, les forces intérieures forment toujours un système équivalent à zéro, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction (*cf.* n° 100). Il en est donc de même des forces extérieures.

Ce théorème se traduit analytiquement par six équations, obtenues en écrivant que la somme géométrique du système et son moment résultant par rapport à un point quelconque de l'espace sont nuls (t. II, n° 116). Si l'on introduit, par exemple, un trièdre $Oxyz$ quelconque, les six coordonnées du système par rapport à ce trièdre doivent être nulles :

$$(5) \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Ces six équations peuvent toujours être écrites pour un système quelconque en équilibre et, par suite, aussi pour une partie quelconque d'un tel système. Elles portent le nom d'*équations universelles d'équilibre.* Mais, il faut bien remarquer que, si elles sont nécessaires, *elles ne sont pas, en général, suffisantes.* Si elles sont remplies, on peut bien affirmer que l'ensemble des forces appliquées aux différents points forme un système équivalent à zéro; mais, on ne peut en conclure que la force appliquée à chaque point est nulle.

125. Cas du corps solide. — Théorème. — *Les six équations universelles sont suffisantes dans le cas d'un corps solide.*

On sait, en effet (n° 102), que le travail de toutes les forces est nul

quel que soit le déplacement. On est, dès lors, ramené au théorème des travaux virtuels.

On déduit de ce théorème que l'on peut, sans détruire l'équilibre d'un corps solide, remplacer les forces extérieures qui lui sont appliquées par d'autres forces formant un système équivalent. En particulier, on peut leur faire subir des opérations élémentaires (t. II, n° 117).

Il existe une méthode élémentaire d'exposition de la Statique du corps solide, qui consiste à admettre *a priori*, comme des postulats, la légitimité de ces opérations. On peut ainsi se passer des quelques considérations de Dynamique dont nous avons fait usage dans ce Chapitre. Mais, la méthode que nous suivons ici est évidemment plus générale, puisqu'elle n'exige pas d'autres axiomes que les axiomes fondamentaux de la Dynamique.

126. Principe de solidification. — Quand on a affaire à un système non solide, on fait quelquefois un raisonnement qui consiste à isoler par la pensée une partie du système et à affirmer qu'on ne troublera pas l'équilibre si on la suppose solidifiée. Et tout ceci pour avoir simplement le droit d'écrire ensuite les six équations universelles. Point n'est besoin de faire autant d'hypothèses, puisque nous savons que ces six équations sont toujours vérifiées pour n'importe quel système, donc en particulier pour le système isolé par la pensée dans le système total. Mais il convient de se rappeler que ces équations ne sont pas, en général, suffisantes. Par exemple, de ce qu'une partie d'un liquide obéirait au principe d'Archimède, on ne saurait conclure que ce liquide est en équilibre.

127. Systèmes de corps solides. — Quand un système S est composé de plusieurs corps solides, entre lesquels sont établies des liaisons déterminées, on peut employer deux méthodes pour rechercher ses positions d'équilibre.

Première méthode (des travaux virtuels). — C'est la méthode générale exposée au n° **122**. Elle n'est applicable pratiquement que *s'il n'y a pas frottement*. Mais, dans ce cas, elle est ordinairement la plus simple.

Deuxième méthode (dite *élémentaire*). — On introduit des réac-

tions partout où un corps solide du système est en contact soit avec un autre corps du système, soit avec un obstacle extérieur. Puis, *on prend successivement tous les corps solides et l'on écrit pour chacun d'eux les six équations universelles d'équilibre.* On obtient ainsi $6n$ équations. S'il est possible de trouver une position du système et des réactions telles que ces $6n$ équations soient vérifiées, en même temps que les hypothèses particulières que l'on doit faire sur les réactions (égalité de l'action et de la réaction, absence de frottement, lois du frottement), on admet que la position trouvée est une position d'équilibre. (On pourrait, dans chaque cas particulier, démontrer rigoureusement que tout mouvement est impossible.)

Cette méthode est évidemment plus compliquée que la première. Par contre, elle a l'avantage de pouvoir s'appliquer même quand il y a frottement; en outre, elle permet le calcul des réactions [1], ce qui a souvent une grande importance pratique au point de vue de la résistance des matériaux.

On peut en varier l'application en *groupant plusieurs corps du système* et écrivant les six équations universelles pour le système partiel obtenu. *On élimine de la sorte les réactions intérieures de ce système partiel.* On peut, en particulier, envisager ainsi le système total proposé. Toutes les équations que l'on obtient sont des combinaisons linéaires des $6n$ équations que donne la méthode régulière; elles peuvent en remplacer une partie; mais il faut bien prendre garde que le nouveau système d'équations soit équivalent à l'ancien.

128. Frottement des corps solides. — Si l'on ne fait, sur les réactions, aucune hypothèse autre que le principe général de l'égalité de l'action et de la réaction, on constate très souvent que les équations obtenues par la méthode précédente sont en nombre inférieur au nombre des inconnues. La Mécanique est alors impuissante à elle seule à déterminer les positions d'équilibre. *Il faut demander*

---

[1] D'une façon plus précise, on peut calculer, pour chaque corps du système, un système de forces équivalent au système des réactions qui lui sont appliquées. Mais, il y a des cas où l'on ne peut pas en déduire la distribution de ces réactions sans faire appel à la théorie de l'élasticité. On dit alors que les liaisons sont *hyperstatiques*.

à l'expérience des équations supplémentaires. On y arrive en étudiant expérimentalement les propriétés des réactions des corps solides les uns sur les autres.

Soient deux corps solides, limités par les surfaces S et S′ assujetties à rester tangentes. Soient M le point de contact, Mn la normale commune et T le plan tangent commun. Soient $\vec{R}$ la réaction de S sur S′ et $\vec{R'} = -\vec{R}$ la réaction de S′ sur S.

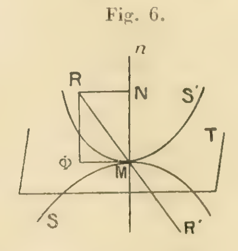
Cas où il n'y a pas frottement. — C'est le cas où *les deux réactions sont normales*, c'est-à-dire portées par Mn. En outre, tant qu'il y a contact, $\vec{R}$ doit être dirigée vers S′ et $\vec{R'}$ vers S.

Il est aisé de vérifier que, dans cette hypothèse, le travail *total* des deux réactions est nul pour tout déplacement élémentaire compatible avec la liaison, c'est-à-dire laissant les deux solides en contact.

En effet, nous savons d'abord que ce travail est indépendant du trièdre de référence (n° 102). Nous pouvons donc supposer que S, par exemple, est fixe. Le travail de R′ est alors nul parce que son point d'application, qui appartient à S, ne se déplace pas. Quant au travail de R, il est également nul parce que son point d'application, qui appartient à S′, se déplace tangentiellement à S, donc perpendiculairement à R.

129. Frottement de glissement. — L'hypothèse précédente est tout à fait théorique et ne se réalise jamais rigoureusement dans la pratique. On peut seulement s'en approcher, en polissant les surfaces

Fig. 6.



ou en les lubrifiant. Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'il y a du frottement, c'est-à-dire, en somme, dans la réalité.

On dit que les deux surfaces *glissent* l'une sur l'autre lorsque le point de contact M, considéré par exemple comme solidaire de S′, a

une vitesse non nulle par rapport à S. Cette vitesse $\vec{G}$, qui est nécessairement dans le plan tangent T, s'appelle la *vitesse de glissement* de S′ sur S.

Quand il y a glissement, la réaction $\vec{R}$ obéit aux lois du frottement de glissement, qui s'énoncent de la même manière qu'au n° 72. Si $\vec{N}$ et $\vec{\Phi}$ désignent ses projections sur la normale Mn et sur le plan tangent T :

1° *La composante tangentielle* $\vec{\Phi}$, *appelée aussi force de frottement, est opposée à la vitesse de glissement* $\vec{G}$;

2° *Le rapport* $\frac{\Phi}{N}$ *est constant et égal au coefficient de frottement de glissement* f *des deux surfaces l'une sur l'autre.*

Si, au contraire, *il n'y a pas de glissement*, c'est-à-dire si $G = 0$, ce qui arrive, en particulier, lorsque les deux corps solides sont au repos [1], on ne sait rien *a priori* sur la direction de $\vec{\Phi}$; on peut seulement affirmer que *le rapport* $\frac{\Phi}{N}$ *est plus petit qu'un certain coefficient* f', toujours plus grand que f, et qu'on appelle le *coefficient de frottement au repos.*

Si, en modifiant progressivement les forces appliquées à S′, on fait croître $\frac{\Phi}{N}$, le glissement commence aussitôt que ce rapport dépasse f'. Immédiatement après, il redevient égal à f, conformément aux lois du frottement de glissement; en outre, $\vec{\Phi}$ est opposée à la vitesse $\vec{G}$. On peut donc dire que, au moment où le glissement va prendre naissance dans une certaine direction, la force de frottement est opposée à cette direction et son rapport à la réaction normale est égal au coefficient de frottement au repos (qu'on appelle aussi *coefficient de frottement au départ*). Mais, tant que $\frac{\Phi}{N} < f'$, le glissement ne se produit pas.

130. Afin de donner au lecteur une idée de l'ordre de grandeur des

---

[1] Cela peut arriver dans d'autres cas (nos 135 et 136).

coefficients de frottement, nous reproduisons ci-dessous le Tableau de quelques coefficients usuels :

Nature des surfaces.	Frottement. Marche.	Frottement. Départ.
Fer sur fonte, à sec	0,18	0,19
Acier sur fonte, suivant la nature du graissage	0,05 à 0,19	»
Acier sur métal blanc (antifriction), à sec	0,23	»
» graissage sous pression	0,01	»
Fer sur chêne, avec glissement parallèle aux fibres, à sec	0,40	0,60
» surfaces mouillées	0,25	0,60
» surfaces graissées	0,08	0,12
Chêne sur chêne, glissement perpendiculaire aux fibres, à sec	0,34	0,54
» surfaces mouillées	0,25	0,70
» surfaces graissées	0,07	0,20
» glissement parallèle aux fibres, à sec	0,48	0,62
Cuir sur fonte polie, à sec	0,10	»
» surfaces grasses	0,20	»
Cuir sur chêne, à sec	0,30	0,45
» surfaces mouillées	0,30	0,75
Corde neuve sur fonte polie	0,08	»
» sur chêne	0,50	0,80
Caoutchouc sur sol moyen, sec	»	0,60
» humide	»	0,30
» boueux	»	0,10

131. Considérons un système de corps solides frottant les uns sur les autres et sur des obstacles extérieurs. Pour qu'une position soit une position d'équilibre, il faut que l'on puisse déterminer en tous les points de contact des réactions satisfaisant aux équations universelles, comme il a été expliqué au n° **127**, et, en outre, en chaque point, à l'inégalité

$$\frac{\Phi}{N} < f, \tag{6}$$

f désignant le coefficient de frottement au repos en ce point.

Réciproquement, si l'on peut faire une telle détermination, on admet qu'il y a équilibre [1]. (On peut démontrer, dans des cas

[1] Ceci suppose toutefois que les liaisons sont telles que tout roulement ou pivotement est impossible. Mais il y a des cas où il n'en est pas ainsi et l'on ne peut alors affirmer l'équilibre, mais seulement l'absence de glissement. Il faut pousser la question plus loin et faire intervenir les lois du frottement de roulement ou de pivotement (n°s 135 et 136).

simples, que tout mouvement est impossible. Mais, en général, on considère ceci comme un résultat d'expérience.)

Quand il y a frottement, les inégalités telles que (6) remplacent les égalités $\Phi = 0$ que donne l'absence de frottement. On en conclut que les positions d'équilibre sont déterminées par des inégalités entre les paramètres dont dépend le système. Par suite, elles sont en nombre infini; il y a, comme nous l'avons déjà dit, des régions d'équilibre. La délimitation de ces régions peut être très compliquée, surtout quand le système dépend de plusieurs paramètres. Dans le cas d'un système à liaisons complètes (n° 119), le problème est généralement plus simple. Un seul mouvement est possible; son sens seul n'est pas déterminé. On suit alors la marche suivante pour trouver les *limites de la région d'équilibre*.

On suppose que le mouvement va se produire dans un certain sens. L'inégalité (6) devient égalité et l'on a autant d'équations que d'inconnues. Par suite, on peut déterminer la position d'équilibre limite à partir de laquelle le mouvement se produirait dans le sens considéré. On recommence ensuite un calcul analogue, en supposant que le mouvement est sur le point de se produire dans l'autre sens et l'on obtient l'autre position limite. On peut ensuite vérifier qu'entre ces deux positions, on peut toujours satisfaire aux inégalités (6).

Cette méthode réussit en général. Mais il y a des cas où elle est en défaut. Il peut arriver, en effet, que les positions d'équilibre soient comprises entre deux positions extrêmes, pour lesquelles le démarrage se produit dans le même sens (*voir*, par exemple, l'Exercice résolu n° 9).

132. Voici, au contraire, une méthode qui est toujours applicable et qui, au surplus, est souvent plus simple. Elle convient dans le cas général d'un système dépendant d'un nombre quelconque de paramètres et présentant un nombre quelconque de points de contact pouvant donner du frottement.

Soient $x, y, z, \ldots$ les paramètres dont dépend le système. Supposons qu'on donne, en chaque point de contact, une valeur déterminée au rapport $\frac{\Phi}{N}$, et soient X, Y, Z, ... ces valeurs. Connaissant X, Y, Z, ..., on peut déterminer la position d'équilibre, car on se trouve dans les mêmes conditions que dans le démarrage envisagé

plus haut. Soient

$$(7) \qquad x = F(X, Y, Z, \ldots), \qquad y = G(X, Y, Z, \ldots), \qquad \ldots$$

les valeurs correspondantes des paramètres. Si $f, f', f'', \ldots$ désignent les coefficients de frottement relatifs aux différents points de contact, les positions d'équilibre sont alors définies par les formules (7) et les inégalités

$$(8) \qquad -f < X < +f, \qquad -f' < Y < +f', \qquad -f'' < Z < +f'', \qquad \ldots$$

En particulier, s'il y a un seul paramètre et un seul point de contact, on peut construire la courbe $x = F(X)$. Les positions d'équilibre correspondent aux arcs de cette courbe compris entre les deux droites parallèles $X = \pm f$.

133. Travail des forces de frottement. — On peut vérifier, dans le cas du frottement de deux corps solides, que le travail total *réel* des réactions est toujours négatif ou nul, ainsi que nous l'avons admis, d'une manière générale, au n° 123. Comme au n° 128, nous pouvons supposer S fixe. Il ne reste alors que le travail de $\vec{R}$, qui est bien négatif, en vertu de la première loi du frottement de glissement.

134. Réversibilité des machines. — Dans une machine, il y a une force motrice P et une force résistante Q [1]. Il y a, en outre, des forces de frottement ou résistances passives. Il arrive assez fréquemment que ces résistances ne dépendent pratiquement que de la force Q, à laquelle elles sont proportionnelles. Le travail absorbé par le frottement $\mathfrak{T}_f$ est alors proportionnel au travail utile $\mathfrak{T}_u$ de la force Q, soit $\mathfrak{T}_f = k\mathfrak{T}_u$. Si $\mathfrak{T}_m$ désigne le travail moteur, on a, dans la marche directe,

$$\mathfrak{T}_m = \mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}_f.$$

Dans la marche inverse, les rôles de P et de Q sont intervertis et l'on a

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_m + \mathfrak{T}_f.$$

Ceci nous montre que la réversibilité n'est possible que si $\mathfrak{T}_u > \mathfrak{T}_f$, c'est-à-dire si $k < 1$. Ceci s'interprète simplement au moyen du rendement de la machine

---

[1] Ceci est un schéma, car il peut y avoir plus d'une force motrice et plus d'une force résistante.

en marche directe. Ce rendement R est, en effet, égal à $\frac{\mathfrak{T}_u}{\mathfrak{T}_m} = \frac{1}{1+k}$. La condition $k > 1$ équivaut à $R < \frac{1}{2}$. Nous avons donc la règle très simple suivante :

La machine est irréversible si son rendement est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Mais, il faut bien prendre garde que cet énoncé n'est légitime que moyennant l'hypothèse faite plus haut que *les frottements ne dépendent que de* Q. S'ils dépendaient en même temps de P, comme la force P qui équilibre Q dépend du sens dans lequel tourne la machine, $\mathfrak{T}_f$ n'aurait pas la même expression dans les deux cas et notre raisonnement serait en défaut.

135. Frottement de roulement. — Soit un cylindre C en équilibre sur un plan P, auquel il est tangent le long d'une génératrice G. Appliquons-lui un couple dont le moment M soit parallèle à G et croisse progressivement à partir de o. L'expérience montre que le cylindre reste en équilibre tant que M ne dépasse pas une certaine limite M'. Aussitôt que cette limite est dépassée, le cylindre se met à rouler sur le plan.

Ceci nous prouve que les réactions du plan sur le cylindre ne peuvent pas être considérées comme étant appliquées aux différents points de G, car, s'il en était ainsi, leur moment résultant par rapport à G serait nul et, par conséquent, elles ne pourraient pas équilibrer le couple ci-dessus, dont le moment par rapport à G est M et peut varier de o à M'.

En réalité, le contact entre C et P a lieu suivant une petite bande admettant sensiblement G pour axe de symétrie. Les réactions sont appliquées aux différents points de cette bande et leur moment par rapport à G est à chaque instant égal et opposé à M. Elles peuvent être remplacées par des réactions appliquées aux différents points de G et par un couple de moment — M. Ce couple est appelé *couple de frottement de roulement*.

La limite M', qu'il ne peut dépasser sans que le roulement se produise, est sensiblement proportionnelle à la résultante N des réactions normales ou, si l'on veut, à la pression exercée par C sur P. Le rapport $h = \frac{M'}{N}$ ne dépend que de la nature des surfaces en contact et porte le nom de *coefficient de frottement de roulement* ou encore de *paramètre de résistance au roulement*. Il est à remarquer que sa valeur numérique dépend du choix de l'unité de longueur, car son symbole de dimensions est L. On admet généralement qu'il est indépendant du rayon du cylindre (du rayon de courbure, si le cylindre n'est pas de révolution). Mais, en réalité, les expériences n'ont pas été faites en faisant varier ce rayon dans de larges limites. Dans tous les cas, on a toujours trouvé pour h des valeurs très faibles vis-à-vis du rayon. Il s'ensuit que si les forces appliquées au cylindre ont des bras de levier du même ordre de grandeur que le rayon, il suffit d'une force très faible par rapport à N pour produire le roulement. C'est dans ce sens qu'on peut dire que les frottements de roulement sont beaucoup plus petits que les frottements de glissement.

Pour un cylindre en bois roulant sur du bois, h peut varier de $0^{mm},5$ à 2^{mm}. Pour une roue de véhicule, h varie de 10^{mm} à 30^{mm}, suivant l'état de la chaussée. Pour les billes en acier employées dans les bicyclettes, h est, en moyenne, égal à $0^{mm},03$.

136. Frottement de pivotement. — Soit un corps solide limité par une surface S, en contact avec un corps solide fixe limité par une surface S'. Supposons que S puisse tourner autour de la normale Oz au point de contact O. Appliquons-lui un couple dont le moment M soit parallèle à Oz et croisse graduellement à partir de o. L'expérience montre que le pivotement ne se produit que lorsque M a dépassé une certaine limite M'.

On peut se rendre compte de ce phénomène de la manière suivante. Au lieu d'un point géométrique de contact, il y a, en réalité, toute une aire de contact A, ayant sensiblement O pour centre de symétrie. Les deux solides frottent l'un contre l'autre et, au moment du démarrage, on a, en chaque point P, une force de frottement obéissant aux lois ordinaires du frottement de glissement. Si l'on prend une petite aire dS environnant P et si l'on appelle n la pression normale par unité de surface en ce point, cette force de frottement est égale à $fn.dS$; en outre, elle est opposée à la vitesse que va prendre P, donc perpendiculaire à OP. Son moment par rapport à Oz est $fnr.dS$, en appelant r la distance OP. Le moment résultant de toutes les forces de frottement analogues est précisément le couple opposé à M : on l'appelle le *couple de frottement de pivotement*. Il est égal à $f(\Sigma nr.dS)$. Toutes choses égales d'ailleurs, il est donc proportionnel à f. Si la pression n était uniforme, la somme entre parenthèses serait égale à $N\frac{\Sigma(r.dS)}{S}$, en appelant N la pression totale et S l'aire totale de A. Si A était indépendante de N, M' serait proportionnel à N. Mais, en réalité, lorsque N augmente, l'écrasement des surfaces devient plus grand, l'aire A s'accroît et M' augmente plus rapidement que s'il était proportionnel à N.

On voit toute la complexité de cette question du frottement de pivotement, dont on peut dire seulement qu'il augmente avec la pression normale et qu'il est proportionnel au frottement de glissement.

137. Équilibre relatif : force centrifuge. — Il arrive quelquefois que, les forces étant données par rapport à un certain trièdre de référence T, on demande les positions d'équilibre par rapport à un autre trièdre T', de mouvement connu par rapport au premier. Un tel équilibre est appelé *équilibre relatif*.

Nous avons vu (n° 48) que le changement de trièdre de référence exige, en général, qu'on applique à chaque point M, de masse m, deux forces nouvelles, que nous avons appelées la *force d'entraînement* et la *force de Coriolis*. Mais, dans le cas particulier où le

point M doit rester au repos par rapport à T', la force de Coriolis est nulle et il ne subsiste que la force d'entraînement, ce qui simplifie considérablement le problème.

On peut d'ailleurs le traiter directement, sans faire intervenir la composition des accélérations. Soit $\vec{\gamma}$ le vecteur accélération du point M, supposé en équilibre relatif, dans son mouvement par rapport à T, c'est-à-dire, en somme, son accélération d'entraînement. Si $\vec{f}$ désigne la force relative au trièdre T qui lui est appliquée, on a

$$(9) \qquad \vec{f} = m\vec{\gamma} \qquad \text{ou} \qquad \vec{f} - m\vec{\gamma} = 0.$$

On appelle *force d'inertie* le vecteur $\vec{f_i} = -m\vec{\gamma}$, c'est-à-dire, en somme, ce que nous avons appelé *force d'entraînement* au nº 48. L'égalité (9) s'écrit, avec cette convention,

$$(10) \qquad \vec{f} + \vec{f_i} = 0.$$

La condition d'équilibre relatif d'un point et, par suite, d'un système, s'obtient donc à la manière habituelle, à condition d'ajouter à toutes les forces données les forces d'inertie d'entraînement.

Un cas particulier très simple est celui où le mouvement d'entraînement est un *mouvement de translation*. Les forces d'inertie sont alors toutes parallèles et proportionnelles aux masses. Dans l'application des équations universelles, on peut les remplacer par leur résultante, qui est la force d'inertie du centre de gravité, où l'on supposerait concentrée toute la masse du système.

138. Un autre cas, moins simple, mais très important dans la pratique, est celui où le mouvement d'entraînement est une *rotation uniforme* autour d'un axe fixe. Si P désigne la projection de M sur cet axe et si ω désigne la vitesse angulaire, on sait que l'accélération d'entraînement est $\omega^2 \overrightarrow{MP}$; donc, la force d'inertie est $m\omega^2 \overline{PM}$. On l'appelle la *force centrifuge*. C'est une répulsion de l'axe proportionnelle à la masse, à la distance à l'axe et au carré de la vitesse angulaire.

Résultante des forces centrifuges sur un corps solide. — Considérons

tous les points M situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe Oz. Pour tous ces points, P est le même et les forces centrifuges qui leur sont appliquées ont une résultante égale à $\omega^2 \Sigma\, m\, \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \omega^2 \mu\, \overrightarrow{\mathrm{P}g}$, en appelant μ leur masse totale et g leur centre de gravité. Si les points tels que g sont distribués n'importe comment, les forces $\omega^2 \mu\, \overrightarrow{\mathrm{P}g}$ n'ont pas de résultante. Mais, *si ces points sont tous dans un même plan avec* Oz, ce qui arrive, par exemple, s'il existe un plan de symétrie contenant cette droite, les forces en question sont parallèles et admettent une résultante égale à leur somme algébrique, soit

$$\omega^2 \Sigma \mu\, \mathrm{P}g = \omega^2 \mathrm{M} . \mathrm{OG},$$

en appelant M la masse totale du corps solide, G son centre de gravité et O la projection de ce point sur Oz. Autrement dit, *la résultante est égale à la force centrifuge qui s'exercerait sur le centre de gravité, si toute la masse était concentrée en ce point.* Mais elle n'est pas nécessairement appliquée en G. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Sigma \mu z x = 0,$$

en prenant OG pour axe des x. Ceci a lieu, en particulier, si le corps solide admet un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe.

Si les dimensions du corps solide sont petites par rapport à sa distance à l'axe, les forces centrifuges sont sensiblement parallèles et proportionnelles aux masses; *elles ont donc pour résultante la force centrifuge du centre de gravité.*

139. Statique du point. — Nous allons maintenant passer en revue quelques cas particuliers simples, qui se rencontrent dans les applications.

Nous commencerons par examiner le cas où le système se réduit à un *point* placé dans un champ de forces déterminé. Si le point est libre, les positions d'équilibre sont les points où la force F est nulle (n° 118). Leurs coordonnées se calculent en annulant les trois composantes de cette force et en résolvant le système obtenu par rapport à x, y, z.

Si le point est gêné, lorsqu'il est en équilibre, la réaction est égale et opposée à la force $\vec{F}$ donnée. Si donc il n'y a pas frottement, on a les positions d'équilibre en cherchant les points pour lesquels $\vec{F}$ est normale à la courbe ou à la surface, sur laquelle le point matériel est assujetti à rester.

S'il y a frottement, le rapport de la composante tangentielle de $\vec{F}$

à sa composante normale doit être inférieur au coefficient de frottement f. Il revient au même de dire que *l'angle que fait* F *avec le plan normal à la courbe ou avec la normale à la surface doit être inférieur à l'*ANGLE DE FROTTEMENT (angle dont la tangente est f). Cette condition détermine les *arcs* ou *aires d'équilibre*.

140. CORPS SOLIDE AYANT UN POINT FIXE. — Les forces F données et la réaction R du point fixe O doivent satisfaire aux conditions universelles. En particulier, le moment par rapport à O doit être nul. Or, le moment de R est nul; donc, il doit en être de même du moment résultant des forces F. Si cette condition est remplie, il ne reste plus qu'à prendre R égale et opposée à la somme géométrique des F. Donc :

THÉORÈME. — *Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le moment résultant des forces données par rapport au point fixe soit nul.*

Il revient au même de dire que ces forces doivent admettre une résultante passant par O. Cette résultante n'est autre que la réaction (ou *pression*) du corps solide sur son appui.

141. CORPS SOLIDE AYANT UN AXE FIXE. — Prenons cet axe pour axe des z, les autres axes étant quelconques. Nous avons des réactions distribuées entre les différents points où S s'appuie sur Oz. Elles doivent former un système nul avec les forces F données. Comme elles ont un moment nul par rapport à Oz, *le moment résultant* N *des* F *par rapport à cet axe doit être également nul.* Si cette condition est remplie, S est en équilibre, comme le montre, par exemple, le théorème des travaux virtuels. On peut chercher à déterminer les réactions.

Supposons, par exemple, qu'il n'y ait que deux points d'appui, qui soient l'origine O et un point O', de cote h. Soient X', Y', Z' les composantes de la réaction de O, et X'', Y'', Z'' celles de la réaction de O'. Soient enfin X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du système des F. On doit avoir

(11) $$X' + X'' = -X, \qquad Y' + Y'' = -Y, \qquad Z' + Z'' = -Z,$$

(12) $$hY'' = L, \qquad hX'' = -M.$$

On aura X'' et Y'' par (12), puis X' et Y' par (11). Mais on ne pourra pas calculer séparément Z' et Z''; on connaîtra seulement leur somme algébrique.

L'indétermination est encore plus grande lorsqu'il y a plus de deux points d'appui. La Statique pure est impuissante à donner la distribution des réactions; il faut faire appel à des hypothèses particulières ou à la théorie de l'élasticité.

Par exemple, si, comme il arrive ordinairement dans les machines, la liaison est réalisée au moyen de deux tourillons munis d'épaulements destinés à empêcher les glissements longitudinaux, il n'y a jamais qu'un seul de ces épaulements qui entre en jeu, suivant le signe de Z. Il en résulte qu'une des composantes Z' et Z'' est nulle et, par suite, l'autre est égale à $-Z$. Si $Z = 0$, les deux composantes sont nulles.

142. Frottement des tourillons sur les coussinets. — Dans la pratique, l'axe a toujours une épaisseur finie et il n'est pas permis de supposer que les réactions sont appliquées en différents points de la ligne géométrique Oz; de sorte que les conclusions qui précèdent ne sont que des conclusions théoriques approximatives. Nous allons reprendre la question de plus près, en nous bornant au cas de deux tourillons et en supposant $Z = 0$.

Chaque tourillon touche son coussinet le long d'une génératrice. Nous admettrons que les réactions ont une résultante appliquée en un point M de la section droite moyenne. Cette résultante sera d'ailleurs dans le plan de cette section, en vertu de l'hypothèse $Z = 0$, ainsi que nous l'avons expliqué à la fin du numéro précédent.

Les équations (11) et (12) sont toujours valables et nous donnent les composantes des deux réactions, que nous pouvons donc considérer comme connues.

Considérons d'abord *le cas théorique où il n'y aurait pas de frottement* entre les tourillons et les coussinets. Chaque réaction doit être normale et, par conséquent, le rayon MO, par exemple, doit être dirigé suivant la réaction en M. Cette condition détermine évidemment chaque point de contact. En outre, on voit que le moment des réactions par rapport à Oz est nul. *La condition d'équilibre est donc encore* $N = 0$, comme au n° 141.

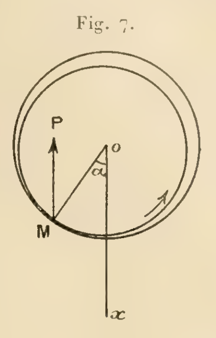
Supposons maintenant qu'il y ait du frottement.

Occupons-nous du tourillon O. Appelons P la réaction correspondante et, pour simplifier les calculs, prenons l'axe des x parallèle à cette réaction et de sens contraire. Soit alors α l'angle polaire du point de contact M. Les composantes normale et tangentielle de la réaction sont $P\cos\alpha$ et $P\sin\alpha$, en orientant la normale dans le sens MO et la tangente par l'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Leur rapport $\tang\alpha$ doit être compris entre $-f$ et $+f$, en désignant par f le

coefficient de frottement. En outre, le moment de P par rapport à Oz est $rP\sin\alpha$, r désignant le rayon du tourillon.

On verrait de même, pour le tourillon O′, en appelant α' l'angle de la direc-

Fig. 7.



tion opposée à P' avec $O'M'$, que le rapport $\tang\alpha'$ doit être compris entre $-f'$ et $+f'$ et que le moment de P' par rapport à Oz est $r'P'\sin\alpha'$.

Le moment résultant des réactions par rapport à Oz est

$$rP\sin\alpha + r'P'\sin\alpha';$$

la condition d'équilibre pour une position déterminée des tourillons est donc

$$(13)\qquad N = -(rP\sin\alpha + r'P'\sin\alpha').$$

Si l'on appelle φ et φ' les angles de frottement, les angles α et α' doivent être respectivement compris entre $-\varphi$ et $+\varphi$ et entre $-\varphi'$ et $+\varphi'$. On doit donc avoir

$$(14)\qquad -(rP\sin\varphi + r'P'\sin\varphi') < N < (rP\sin\varphi + r'P'\sin\varphi').$$

Si cette double inégalité est satisfaite, on peut toujours trouver des angles α et α' satisfaisant à (13) et inférieurs aux angles de frottement en valeur absolue [1]. On peut, par conséquent, trouver un système de réactions satisfaisant aux équations universelles d'équilibre et aux lois du frottement. Donc, il y a équilibre (n° 127).

Si, au contraire, N dépasse, par exemple, la limite supérieure que lui assigne l'inégalité (14), il est impossible que les angles α et α' soient respectivement supérieurs à $-\varphi$ et à $-\varphi'$. Or, si $\alpha < -\varphi$, le tourillon O se met à glisser sur son coussinet; la réaction obéit aussitôt aux lois du frottement en marche; donc α devient égal à $-\varphi$ (ou même à un angle algébriquement plus grand,

---

[1] Il y a même une infinité de solutions, de sorte que la position que prennent les tourillons sous l'action de forces données ne peut être entièrement déterminée par la Statique pure. On peut y arriver en faisant intervenir la torsion élastique de l'axe.

si le coefficient de frottement au départ est plus grand que le coefficient de frottement en marche). Mais alors, α' est nécessairement $< -\varphi'$ et le deuxième tourillon glisse également. Le glissement a lieu dans un sens tel que la vitesse de glissement en chaque point de contact soit opposée à la force de frottement; dans l'hypothèse actuelle, la rotation a lieu dans le sens positif. Elle aurait lieu dans le sens négatif, si N était plus petit que le premier membre de (14).

En résumé, les choses se passent de la manière suivante. Supposons que le couple N croisse d'une manière continue, à partir de zéro. Au début, on peut admettre que les angles α et α' sont nuls [1], comme cela doit être quand il n'y a pas frottement. Puis, chaque tourillon se met à rouler sur son coussinet, de manière que α et α' deviennent négatifs et augmentent en valeur absolue. A un certain moment, l'un de ces angles, par exemple α, atteint la valeur $-\varphi$. Le tourillon correspondant se met alors à glisser, son point de contact M demeurant fixe sur le coussinet. L'autre tourillon continue à rouler jusqu'à ce que N ait atteint sa limite supérieure. A ce moment, α' atteint la valeur $-\varphi'$ et le deuxième tourillon se met aussi à glisser comme le premier.

143. Corps solide reposant sur un plan fixe. — Le contact a lieu en un certain nombre fini ou infini de points. On appelle *base de sustentation* la plus petite aire *convexe* renfermant tous ces points. Elle est limitée par une ligne constituée par des points de contact ou par des segments ayant pour extrémités des points de contact. Elle peut se réduire à un segment ou à un point, dans les cas particuliers où les points de contact sont tous en ligne droite ou bien réduits à un seul point.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas frottement. Toutes les réactions sont normales au plan et dirigées du côté où se trouve le corps solide S. Elles admettent une résultante jouissant de la même propriété et appliquée en un point qui appartient certainement à la base de sustentation. Cette résultante doit former un système nul avec les forces F données; donc, *ces dernières doivent aussi admettre une résultante* R *normale au plan, perçant celui-ci en un point* O *appartenant à la base de sustentation et dirigée vers la région où ne se trouve pas* S. Réciproquement, si cette condition est remplie, on peut toujours trouver trois points de contact formant un triangle comprenant O à son intérieur [2]; puis, décomposer R en

(1) En réalité, cela ne résulte pas de la Statique pure, mais de l'étude de la torsion de l'axe.

(2) Si la base de sustentation est un segment, on cherchera seulement deux points de contact, entre lesquels se trouve O.

trois forces parallèles appliquées aux sommets de ce triangle. En prenant enfin les forces opposées, on obtient un système de réactions formant un système nul avec les forces F et, par conséquent, il y a équilibre. Quant à la détermination effective des réactions véritables, elle ne peut se faire que si le nombre total des points de contact est égal à trois (deux, si les points sont en ligne droite). Sinon, la liaison est hyperstatique; il faut faire intervenir l'élasticité.

144. *S'il y a frottement*, avec un coefficient de frottement uniforme dans tout le plan, on peut seulement affirmer, quand il y a équilibre, que chaque réaction fait avec la normale au plan un angle inférieur à l'angle de frottement. Mais ces réactions n'admettent pas nécessairement une résultante. Prenons la résultante N de leurs composantes normales. Elle est appliquée en un certain point O de la base de sustentation. Faisons maintenant la réduction en O des composantes tangentielles. Nous obtenons une force de frottement Φ et un couple C qui est le couple de frottement de pivotement (n° 136). Le rapport $\frac{\Phi}{N}$ doit être inférieur au coefficient de frottement f, car, si l'on transporte toutes les réactions au point O, elles sont toutes intérieures au *cône de frottement* (cône de sommet O, dont l'axe est la normale au plan et le demi-angle au sommet l'angle de frottement) et par suite aussi leur somme géométrique. Quant au couple C, on peut remarquer que la réaction appliquée en un point M situé à la distance r du point O a un moment par rapport à O nécessairement compris entre $-fnr$ et $+fnr$, si n désigne sa composante normale. Donc, C est nécessairement compris entre $-f.\Sigma nr$ et $+f.\Sigma nr$. La somme Σnr dépend de la distribution des réactions normales entre les différents points de contact; on peut la désigner par ρN, ρ désignant la moyenne des distances r affectées des coefficients n, moyenne nécessairement comprise entre la plus petite et la plus grande de toutes ces distances. Dans ces conditions, on peut affirmer que $\frac{C}{N}$ doit être compris entre $-f\rho$ et $+f\rho$.

Si nous revenons maintenant aux forces données F, on peut toujours les réduire à une force unique R appliquée en un certain point O du plan et à un couple Γ dont le moment est perpendiculaire à ce plan. (Le point O n'est autre que le pôle du plan par rapport au complexe linéaire attaché au système des vecteurs F; *cf.* t. II, n° 125.) D'après ce qui précède, il faut, pour qu'il puisse y avoir équilibre, que le point O soit intérieur à la base de sustentation et que R fasse avec la normale au plan un angle inférieur à l'angle de frottement. Quant au couple Γ, qui doit être opposé au couple C, on sait seulement qu'il doit être inférieur en valeur absolue à une certaine limite, qui dépend de la distribution des réactions normales, mais dont on peut dire toutefois qu'elle est proportionnelle à f et aussi à N, si l'on fait varier proportionnellement toutes les réactions normales.

Le seul cas simple est celui où les forces F ont une résultante

unique R. La seule condition d'équilibre est alors que *cette force soit dirigée vers le plan, le perce à l'intérieur de la base de sustentation et fasse avec la normale un angle inférieur à l'angle de frottement*. Si cette condition est remplie, on peut trouver, comme dans le cas du plan poli, trois réactions parallèles ayant pour résultante la force — R et, par conséquent, il y a équilibre ([1]).

Il est à remarquer que la condition d'équilibre, dans le cas d'une seule force R, ne dépend que de la direction de cette force et nullement de sa grandeur. Si elle est remplie, l'équilibre persiste si grande que soit la force. C'est le phénomène de l'*arc-boutement*.

145. *Remarque*. — Il est facile de vérifier que, dans tous les problèmes examinés aux nos 140 à 143, le nombre des équations indépendantes des réactions est, lorsqu'il n'y a pas frottement, juste égal au nombre des paramètres dont dépend la position du corps solide.

146. Notions sur l'équilibre des fils. — Un fil est un milieu continu assimilable à une ligne géométrique. On dit qu'il est *inextensible*, si la longueur qui sépare deux quelconques de ses points est invariable. Dans la pratique, un tel fil n'existe pas, car, quelle que soit sa nature, il s'allonge toujours un peu quand on le tend. La théorie de l'élasticité tient compte de cet allongement. Nous le considérerons ici comme négligeable.

Considérons un fil AB et soit M un de ses points. L'arc MB exerce sur l'arc MA certaines réactions, dont nous ne savons rien *a priori*. On dit que le fil est *parfaitement flexible* lorsque ces réactions se réduisent à une force unique $\vec{T}$ appliquée au point M ([2]). Inversement, l'arc MA exerce sur MB la force $-\vec{T}$.

([1]) Les réactions véritables ne sont pas nécessairement les réactions fictives ainsi déterminées. En particulier, on ne peut affirmer leur parallélisme que lorsque l'on se trouve à la limite de l'équilibre, c'est-à-dire au moment où le glissement va se produire. Ce glissement ne peut d'ailleurs être qu'une translation, sans quoi il y aurait un couple de pivotement, qui serait le moment résultant des réactions par rapport au centre instantané de rotation (*cf.* n° 136).

([2]) Cela revient à dire que l'arc MB, considéré comme un corps solide, peut pivoter librement dans toutes les directions autour du point M, quand on considère l'arc MA comme fixe. Aucun couple (de flexion ou de torsion) ne s'oppose à ce pivotement. Dans la pratique, cela n'est jamais réalisé rigoureusement; un fil a toujours de la *raideur*.

Considérons d'abord le cas simple où les seules forces extérieures appliquées au fil sont une force $\vec{F}$ appliquée en A et une force $\vec{F'}$ appliquée en B. D'après les conditions universelles d'équilibre, ces deux forces doivent former un système nul; elles sont donc égales, dirigées suivant la droite AB et de sens opposés.

Considérons maintenant l'arc AM. Les forces extérieures qui lui sont appliquées sont $\vec{F}$ et la réaction $\vec{T}$. En vertu des conditions universelles d'équilibre, nous voyons comme précédemment que $\vec{T}$ doit être dirigé suivant AM et égale et opposée à $\vec{F}$. Comme ce raisonnement est valable quel que soit le point M choisi sur le fil, celui-ci est nécessairement *rectiligne*. En outre, *la réaction* T *est dirigée suivant le fil;* elle est constante et égale et opposée à la force qui s'exerce à l'extrémité A ; on l'appelle la *tension du fil.*

Théoriquement, nous ne savons rien sur le sens de cette tension. Mais, l'expérience la plus vulgaire nous apprend que, pour tendre un fil, il faut tirer et non pousser aux deux bouts. Autrement dit, $\vec{F}$ doit être dirigée dans le sens BA et, par suite, $\vec{T}$ dans le sens MB. La tension exercée par MB sur MA doit être *positive*, si l'on oriente le fil de A vers B.

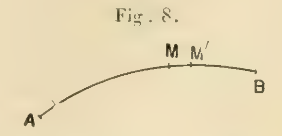
Le cas particulier que nous venons d'examiner n'est jamais rigoureusement réalisé, car un fil est toujours soumis à d'autres forces que celles qui s'exercent à ses extrémités, quand ce ne serait qu'à son poids, qui est réparti tout le long du fil. Toutefois, dans la pratique, il arrive souvent qu'on s'en approche beaucoup. Il en est ainsi, par exemple, lorsque le poids du fil est négligeable vis-à-vis des forces F et F′ exercées aux extrémités. Dans ce cas, les conclusions précédentes sont applicables même si le fil est en mouvement, pourvu que les accélérations de ses différents points ne soient pas très grandes par rapport à l'accélération de la pesanteur. On peut, en effet, appliquer encore les conditions universelles d'équilibre, à condition d'introduire les forces d'inertie (n° 137). Or, celles-ci sont négligeables, tout comme le poids, puisque le rapport $\frac{\gamma}{g}$ n'est pas très grand.

147. *Cas général.* — Envisageons maintenant le cas général où chaque élément MM′ du fil est soumis à une force proportionnelle à sa masse ou, ce qui revient au même, à sa longueur *ds*, soit $\vec{\Phi}\,ds$. Le vecteur $\vec{\Phi}$ est supposé connu

en chaque point M et peut d'ailleurs varier en grandeur et en direction, d'un point à l'autre. Nous désignerons ses composantes suivant les axes de référence par X, Y, Z. Quant au point d'application de la force élémentaire $\vec{\Phi}\, ds$, nous supposerons seulement qu'il est quelque part sur l'arc MM'.

Cela posé, écrivons les conditions universelles d'équilibre pour l'arc MM'.

Fig. 8.



Les forces extérieures sont $\vec{\Phi}\, ds$, la réaction $\vec{T}'$ de M'B sur MM' et la réaction $-\vec{T}$ de AM sur MM'. Prenons d'abord le moment résultant par rapport à M. Le moment de $-\vec{T}$ est nul; celui de $\vec{\Phi}\, ds$ est infiniment petit du second ordre par rapport à ds, car la force et le bras de levier sont chacun du premier ordre; donc, le moment de $\vec{T}'$ est aussi du second ordre. Comme la force T' est finie (puisqu'elle est égale et opposée à la somme géométrique des forces appliquées sur AM'), on en conclut que son bras de levier est du second ordre. Or, la tangente en M' est la seule droite qui passe à une distance de M infiniment petite du second ordre par rapport à l'arc MM' (t. II, n° 330). Donc, $\vec{T}'$ est tangente en M' au fil. Ceci est vrai quel que soit M'. Donc, *la réaction de* MB *sur* MA *est, en chaque point, tangente au fil.* Nous admettrons, de plus, comme un fait d'expérience (*cf.* n° 146), qu'elle est dirigée du côté de MB, c'est-à-dire suivant la demi-tangente positive, si l'on oriente le fil de A vers B. Nous l'appellerons la *tension du fil au point* M.

Écrivons maintenant que la somme géométrique des forces appliquées à MM' est nulle :

$$\vec{\Phi}.ds + \vec{T}' - \vec{T} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{\Phi} + \frac{\vec{T}' - \vec{T}}{ds} = 0.$$

Comme ds est infiniment petit, le second terme n'est autre que la dérivée géométrique du vecteur $\vec{T}$ par rapport à s. On a donc

$$(1) \qquad \vec{\Phi} + \frac{d\vec{T}}{ds} = 0.$$

Telle est la condition d'équilibre, qui doit être vérifiée tout le long du fil.

On a, en outre, des *conditions aux limites*, qui sont que la tension en A doit être égale et opposée à la force $\vec{F}$ et que la tension en B doit coïncider avec la force $\vec{F}'$, ainsi qu'on s'en rend compte, en supposant que l'arc MM' a une extrémité en A ou en B.

148. L'égalité géométrique (15) équivaut, comme on sait, à trois égalités algébriques obtenues en la projetant sur trois axes. Si l'on projette sur les axes de référence $Oxyz$, on a, en appelant a, b, c les cosinus directeurs de la demi-tangente positive et T la grandeur de la tension en M,

$$(16) \qquad X + \frac{d(Ta)}{ds} = 0, \qquad Y + \frac{d(Tb)}{ds} = 0, \qquad Z + \frac{d(Tc)}{ds} = 0.$$

Ce sont les équations différentielles qui permettent de déterminer la forme que prend le fil dans sa position d'équilibre, ainsi que la tension en chaque point.

On peut aussi projeter sur les axes de Frenet (t. II, n° 324), comme nous l'avons déjà fait en Dynamique (n° 58). Si l'on remarque que

$$\frac{d(Ta)}{ds} = \frac{dT}{ds}a + T\frac{da}{ds} = \frac{dT}{ds}a + T\frac{a'}{R},$$

en appelant (a', b', c') les cosinus directeurs de la normale principale et appliquant une formule de Frenet, on voit que les équations (16) équivalent aux suivantes :

$$(17) \qquad \frac{dT}{ds} + \Phi_t = 0, \qquad \frac{T}{R} + \Phi_n = 0, \qquad \Phi_b = 0,$$

en appelant Φ_t, Φ_n, Φ_b les projections du vecteur $\vec{\Phi}$ sur la tangente, la normale principale et la binormale.

Ces équations sont appelées les *équations intrinsèques* d'équilibre. On remarquera leur analogie avec les équations de même nom de la Dynamique.

CHAPITRE X.

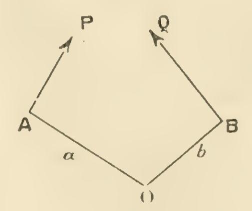
APPLICATIONS DE LA STATIQUE.

Nous allons, dans ce Chapitre, appliquer les méthodes générales exposées au Chapitre précédent à quelques problèmes simples, qui se présentent couramment dans la pratique.

149. Levier. — Un *levier* est, en principe, un corps solide pouvant tourner autour d'un axe fixe O et soumis à deux forces P et Q perpendiculaires à cet axe et appelées l'une *puissance*, l'autre *résistance*.

Si a et b sont les *bras de levier*, c'est-à-dire les plus courtes dis-

Fig. 9.



tances OA et OB (*fig.* 9), la condition d'équilibre est (n° 141)

$$\text{(1)} \qquad Pa = Qb,$$

les forces devant, en outre, être dirigées dans des sens contraires, de manière que leurs moments par rapport à O soient de signes différents.

On peut aussi obtenir l'équation (1) par le théorème des travaux virtuels. Si le levier tourne de $d\varphi$, le point A a un déplacement suivant P égal à $a\,d\varphi$; le travail élémentaire de la puissance est $Pa\,d\varphi$. De même, celui de la résistance est $-Qb\,d\varphi$, en supposant Q dirigée

dans le sens opposé au sens de la rotation. En annulant la somme de ces deux travaux et divisant par $d\varphi$, on retrouve bien (1).

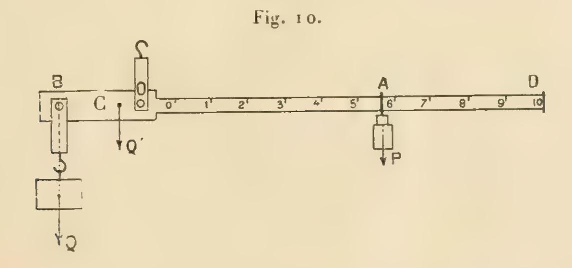
Habituellement, le levier est *droit*, c'est-à-dire que les points A, B, O sont en ligne droite, les forces P et Q étant parallèles. On distingue alors *trois genres*, suivant la position de O par rapport à AB. Mais, cette distinction n'a pas grande importance.

Lorsque les points A, B, O ne sont pas en ligne droite, on dit que le levier est *coudé*.

150. *Balance*. — Une application très importante du levier est la *balance*, qui sert à comparer les poids et, par suite, les masses de deux corps quelconques.

Citons d'abord la *balance romaine* (*fig*. 10). Le point O est entre

Fig. 10.



A et B. Le poids P est celui d'une masse constante, qui peut glisser le long du *fléau* OD. Le poids Q est celui du corps à peser. Soient enfin Q' le poids de la balance quand on supprime P et Q, et C son centre de gravité. En appelant a, b, c les distances OA, OB, OC, la condition d'équilibre dans la position horizontale du fléau est

$$Pa = Qb + Q'c. \tag{2}$$

On voit que Q est une fonction linéaire de a. On en déduit immédiatement la graduation de l'appareil. On détermine le zéro en supprimant Q, puis le point 10, par exemple, en suspendant un poids Q de 10^{kg}. Il n'y a plus ensuite qu'à diviser en parties égales.

151. La *balance ordinaire* est, en principe, un levier rectiligne, appelé *fléau*, dont les deux bras OA et OB sont égaux et dont le centre de gravité G est juste au-dessous du point de suspension quand l'aiguille est au zéro, AB étant alors sensiblement horizontal.

On suspend en A et en B deux poids P et Q. Pour que l'équilibre subsiste, l'aiguille restant au zéro, il faut et il suffit que $P = Q$. L'équilibre est d'ailleurs stable, car le centre de gravité est le plus bas possible (n° 120).

Cette théorie est très suffisante pour les pesées de la vie courante. Mais, pour les pesées de haute précision qui sont exigées dans les laboratoires, il faut voir les choses d'un peu plus près.

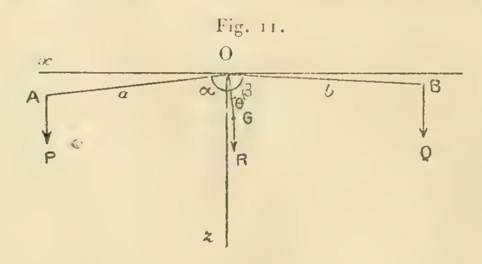
Bien que les constructeurs s'efforcent de les réaliser, les conditions supposées ci-dessus ne sont jamais remplies exactement. Les trois couteaux A, O, B ne sont pas en ligne droite et les bras OA et OB ne sont pas égaux. Reprenons alors la théorie, en ne faisant aucune hypothèse.

Posons

$$(3) \qquad OA = a, \qquad OB = b, \qquad OG = c, \qquad \widehat{AOG} = \alpha, \qquad \widehat{BOG} = \beta.$$

Appelons P et Q les poids suspendus en A et B et R le poids du fléau. Soit θ l'angle de la verticale descendante Oz avec OG, lorsque la balance est en équilibre sous l'action de ces poids, le plan étant orienté, par exemple, de Ox vers Oz (*fig.* 11). Écrivons que le

Fig. 11.



moment résultant par rapport à O est nul; nous avons, en remarquant que les angles polaires de OA, OB, OG par rapport à Ox sont respectivement $\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \theta + \beta$, $\frac{\pi}{2} + \theta$,

$$Pa\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right) + Qb\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \beta\right) + Rc\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0$$

ou

$$(4) \qquad Pa\sin(\theta - \alpha) + Qb\sin(\theta + \beta) + Rc\sin\theta = 0.$$

Telle est l'équation d'équilibre. On pourrait, par exemple, la résoudre par rapport à $\tang\theta$.

L'aiguille est au zéro quand la balance est vide, c'est-à-dire quand $P = Q = 0$. L'équation (4) nous donne alors $\theta = 0$, ce qui était, du reste, évident *a priori*. On dit que *la balance est juste* si l'aiguille reste au zéro lorsqu'on met des poids égaux quelconques dans les plateaux. Autrement dit, l'équation (4) doit être vérifiée identiquement pour $\theta = 0$ et $P = Q$; ceci exige la condition

$$a \sin \alpha = b \sin \beta. \tag{5}$$

Si elle n'est pas remplie, on ne peut affirmer que les poids des deux plateaux sont égaux quand l'aiguille est au zéro. Pour éviter cette cause d'erreur, on emploie la méthode bien connue de la *double pesée*.

Quelle que soit la construction de la balance, on peut affirmer que, pour des valeurs données de θ et de Q, l'équation (4) n'a qu'une seule solution en P. Si donc on fait successivement deux pesées, en ramenant toujours la balance dans la même position (par exemple, l'aiguille au zéro; mais, ce n'est pas nécessaire) et en gardant le même poids Q dans le plateau B, on peut affirmer que, dans les deux expériences, le poids P aura été le même. Il suffit, dès lors, que la première pesée ait été faite avec le poids inconnu et la seconde avec des poids marqués.

152. *Sensibilité*. — La balance est d'autant plus sensible que l'aiguille s'écarte davantage du zéro pour une petite augmentation donnée du poids P, par exemple. Pour calculer l'amplitude $d\theta$ de cet écart, différentions totalement l'équation (4) par rapport à P et à θ :

$$dP\, a \sin(\theta - \alpha) + [P a \cos(\theta - \alpha) + Q b \cos(\theta - \beta) + R c \cos\theta]\, d\theta = 0. \tag{6}$$

Si nous supposons $\theta = 0$ (on fait les pesées en ramenant l'aiguille au zéro), il vient

$$\frac{d\theta}{dP} = \frac{a \sin \alpha}{P a \cos \alpha + Q b \cos \beta + R c}. \tag{7}$$

Ce rapport peut être considéré comme la *mesure de la sensibilité*.

Si la balance était construite comme nous l'avons supposé au début, on aurait $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. La sensibilité serait

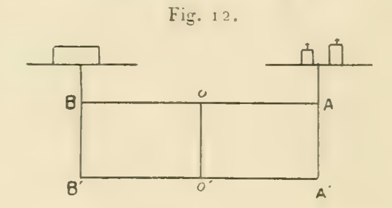
$$S = \frac{a}{Rc}. \tag{8}$$

Elle serait indépendante des poids P et Q ou, comme on dit, de la *charge*; elle serait proportionnelle à la longueur du fléau, inversement proportionnelle à son poids et inversement proportionnelle à la distance OG. Pratiquement, les angles α et β sont toujours très voisins de $\frac{\pi}{2}$ et la formule (8) est encore à peu près exacte. Toutefois, pour une forte charge et si Rc est petit (comme on s'efforce de le réaliser pour augmenter S), on peut dire que la sensibilité dépend de la charge (1); de là vient la pratique de faire les doubles pesées en employant toujours la même tare Q, pour avoir une sensibilité constante.

153. *Balance de Roberval.* — Dans la balance ordinaire, les poids P et Q sont, comme on sait, posés dans deux plateaux *suspendus* à des couteaux fixés en A et en B dans le fléau. Les forces P et Q de la théorie précédente sont alors les réactions sur ces couteaux.

Dans le commerce, on utilise peu ce mode de suspension et l'on emploie plutôt la *balance de Roberval* (*fig.* 12). Les plateaux sont

Fig. 12.



au-dessus des couteaux. Mais, comme ils seraient en équilibre instable, on les empêche de chavirer et l'on assure leur horizontalité au moyen du double parallélogramme articulé AOBB'O'A'. Par construction, OO' est vertical; il en est donc de même des tiges AA' et BB' et, par suite, les plateaux demeurent horizontaux.

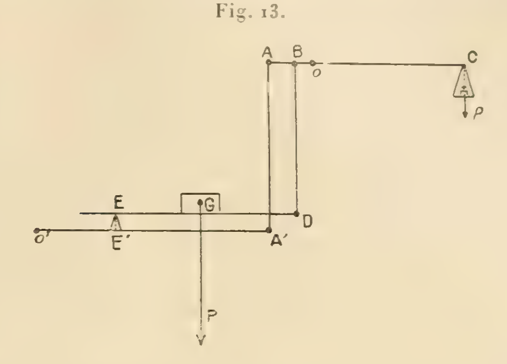
On pourrait chercher la condition d'équilibre en appliquant la méthode élémentaire (n° 127) à ce système de corps solides; mais, il est plus simple d'appliquer le théorème des travaux virtuels. Quand le parallélogramme se déforme, les déplacements verticaux des points A et B et par suite des centres de gravité des corps placés dans les plateaux sont égaux et de sens contraires. Pour que le travail virtuel

(1) Elle diminue, quand la charge augmente, si les angles α et β sont aigus, comme il arrive généralement.

total de P et de Q soit nul, il faut et il suffit que ces poids soient égaux.

154. Bascule. — Elle se compose schématiquement (*fig.* 13) d'un

Fig. 13.



levier ABOC, dont le point fixe est en O. Au point C est suspendu un poids marqué p. En B et en A sont articulées deux tiges verticales BD et AA′, qui s'articulent, d'autre part, la première en D avec le tablier DE sur lequel repose le corps à peser, la seconde en A′ avec un autre levier A′O′, de point fixe O′. Le tablier repose en E sur un couteau solidaire de O′A′. Le tout est construit de manière que, lorsque ABOC est horizontal, DE et A′O′ le soient aussi.

Cela posé, appliquons le théorème des travaux virtuels. Donnons à AOC une rotation virtuelle de l'angle infiniment petit ε, dans un sens tel que C descende, par exemple. Le travail virtuel de p est $p.\mathrm{OC}.\varepsilon$. Pour calculer celui du poids P, il faut connaître le déplacement vertical du point G. Ce déplacement doit être indépendant de la position du corps sur le tablier, si l'on ne veut pas que l'équation d'équilibre dépende de cette position. Pour cela, il faut et il suffit que le tablier reste horizontal, c'est-à-dire que le déplacement vertical de D soit égal à celui de E. Or, le déplacement de D est égal à $\mathrm{OB}.\varepsilon$ et il est dirigé vers le haut. Celui de E est le même que celui de E′, lequel est dans le rapport $\frac{\mathrm{O'E'}}{\mathrm{O'A'}}$ avec le déplacement de A′. Or, le déplacement de A′ est égal à celui de A, soit $\mathrm{OA}.\varepsilon$ et vers le haut. Donc, le déplacement de E est $\frac{\mathrm{O'E'}}{\mathrm{O'A'}}.\mathrm{OA}.\varepsilon$ et, comme celui de D, il est dirigé vers le haut. Finalement, pour que le tablier reste

horizontal, il faut et il suffit que l'on ait

$$OB.\varepsilon = \frac{O'E'}{O'A'} \cdot OA.\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \frac{OB}{OA} = \frac{O'E'}{O'A'}.$$

Cette condition étant réalisée, le déplacement vertical du point G est égal à OB.ε et le travail virtuel de P est $-P.OB.\varepsilon$. L'équation d'équilibre est donc

$$(9) \qquad p.OC - P.OB = 0 \qquad \text{ou} \qquad P = p.\frac{OC}{OB}.$$

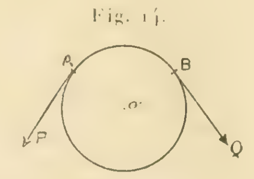
Habituellement, le rapport $\frac{OC}{OB}$ est égal à 10, de sorte que $P = 10p$. On peut aussi, comme dans la balance romaine (n° 150), donner à p une valeur constante et déplacer le point C. Le poids P est alors proportionnel à la distance OC et il suffit de graduer le bras du levier. Enfin, on peut combiner les deux méthodes, en mettant un poids variable p' à la distance fixe OC′ et faisant l'appoint au moyen du poids p à la distance variable OC. Le théorème des travaux virtuels donne alors, en supposant $OC' = 10 \times OB$,

$$(10) \qquad P = 10p' + \frac{p}{OB} \cdot OC.$$

On ajoute les poids que donnent séparément les deux méthodes, c'est-à-dire le poids lu sur la graduation et 10 fois le poids marqué placé dans le plateau suspendu en C′.

155. Poulie fixe. — C'est un cercle qui peut tourner autour d'un axe O perpendiculaire à son plan et passant par son centre et sur la circonférence duquel est enroulée une corde, aux extrémités de

Fig. 14.



laquelle sont appliquées la puissance P et la résistance Q. Si l'on néglige le poids de cette corde et si on la suppose parfaitement flexible, chaque brin est rectiligne (n° 146) et tangent à la circonférence.

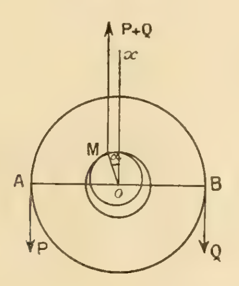
Si l'on applique à tout le système (poulie, corde) le théorème des

moments par rapport à l'axe, on voit que, si l'on néglige les frottements de la poulie sur son axe, *la puissance doit être égale à la résistance*.

La même conclusion est valable si l'on suppose que la poulie tourne d'un mouvement uniforme (n° 121), comme cela a généralement lieu dans la pratique.

156. Si l'on veut maintenant tenir compte du frottement de la poulie sur son axe, on peut procéder comme au n° 142. Nous n'avons qu'un seul tourillon, qui est fixe, et c'est l'œil de la poulie qui joue le rôle du coussinet. Bornons-nous au cas où les deux brins sont parallèles. La réaction de l'axe sur la poulie

Fig. 15.



est parallèle à Ox (*fig.* 15) et elle est égale à $P+Q$. En prenant les moments par rapport à O, nous avons l'équation

$$(P-Q)R = r(P+Q)\sin\alpha;$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{1+\frac{r}{R}\sin\alpha}{1-\frac{r}{R}\sin\alpha}. \tag{11}$$

Ce rapport est une fonction croissante de $\sin\alpha$; comme α doit être compris entre $-\varphi$ et $+\varphi$, il s'ensuit que $\frac{P}{Q}$ doit être compris entre les deux limites obtenues en remplaçant, dans le second membre, α par $-\varphi$ et par $+\varphi$. En supposant, pour fixer les idées, $P \geqq Q$, la condition d'équilibre est

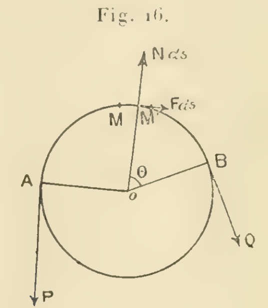
$$\frac{P}{Q} \leqq \frac{1+\frac{r}{R}\sin\varphi}{1-\frac{r}{R}\sin\varphi}. \tag{12}$$

La poulie ne commence à tourner que lorsque $\frac{P}{Q}$ atteint le second membre. On voit donc que la puissance doit être supérieure à la résistance.

157. *Glissement de la corde sur la gorge de la poulie.* — La condition d'équilibre précédente est une condition nécessaire. Mais, nous ne pouvons affirmer qu'elle est suffisante que si nous supposons que le système est solide, c'est-à-dire si nous admettons que la corde ne glisse pas sur la poulie. Cherchons à quelle condition il en est ainsi.

Il nous faut envisager séparément l'équilibre de la corde, que nous assimilons à un fil parfaitement flexible [1] et inextensible. D'abord, comme nous négligeons son poids, la tension en A (*fig.* 16) est P et la tension en B est Q

Fig. 16.



(n° 146). Occupons-nous maintenant de l'arc AB. Sur chaque élément MM' s'exerce la réaction de la poulie, dont nous désignons les composantes normale et tangentielle par N ds et F ds. Si nous supposons que le glissement est sur le point de se produire dans le sens BA, que nous prendrons comme sens positif de rotation, la force de frottement F ds est dirigée dans le sens négatif et égale à f N ds, f désignant le coefficient de frottement de la corde sur la poulie.

Cela posé, écrivons les équations intrinsèques de l'équilibre (n° 148)

$$(13)\qquad \frac{dT}{ds} - F = 0, \qquad \frac{T}{R} - N = 0.$$

Éliminons F et N, en tenant compte de $F = fN$:

$$(14)\qquad \frac{dT}{ds} = f\frac{T}{R}.$$

Cette équation s'intègre immédiatement et donne, en prenant B pour origine

---

(1) Dans la réalité, les cordes ont de la *raideur*; on en tient quelquefois compte (*cf.* Exercice proposé n° 10).

des arcs et se rappelant que la tension en ce point est Q,

$$T = Qe^{f\frac{s}{R}} \tag{15}$$

ou, en introduisant l'*angle* θ *d'enroulement*, compté à partir du rayon OB,

$$T = Qe^{f\theta}. \tag{16}$$

Enfin, si nous appelons α l'angle total d'enroulement, depuis B jusqu'à A [1], nous avons

$$P = Qe^{f\alpha}. \tag{17}$$

Telle est la puissance à partir de laquelle commence le glissement. Donc, les conclusions du numéro précédent ne sont valables que si le second membre de (12) est inférieur à $e^{f\alpha}$.

Pratiquement, cette condition est toujours remplie, car le rapport $\frac{r}{R}$ est très petit.

158. *Puissance transmise par une poulie de transmission.* — Dans le cas d'une poulie de transmission, la poulie est soumise à l'action d'un couple moteur ou résistant, suivant que la poulie est *menante* ou *menée*. De plus, la corde est ordinairement une *courroie*. Soit C le couple, que nous supposerons moteur, pour fixer les idées.

L'ensemble des réactions de la courroie sur la poulie forme un système équivalent à l'ensemble des tensions P et Q des deux brins, puisque les réactions opposées de la poulie sur la courroie doivent former un système nul avec ces deux tensions, en vertu des conditions universelles d'équilibre. Comme nous supposons le régime permanent, les forces P et Q et le couple C doivent former un système nul. Ceci nous prouve d'abord que le brin le plus tendu doit être dirigé en sens inverse de la rotation, comme l'indique d'ailleurs le bon sens. (Sur la figure 15, si l'on suppose toujours $P > Q$, la roue doit tourner dans le sens de A vers B. On aurait des conclusions inverses si la poulie était menée, au lieu d'être menante.) En outre, on doit avoir

$$C = (P - Q)R = QR(e^{f\alpha} - 1) = PR(1 - e^{-f\alpha}). \tag{18}$$

Si ω désigne la vitesse angulaire, la puissance transmise est (n° 108)

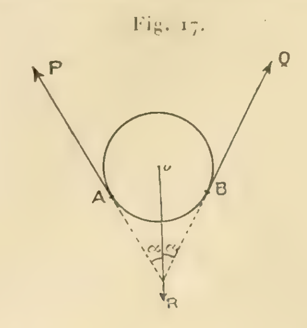
$$W = C\omega = PR\omega(1 - e^{-f\alpha}). \tag{19}$$

---

[1] Cet angle est généralement inférieur à 2π, pour les poulies employées pour la transmission d'un mouvement. Mais, si l'on veut obtenir une grande valeur du rapport $\frac{P}{Q}$, on peut enrouler la corde plusieurs fois. C'est ce que font, par exemple, les marins, quand ils veulent arrêter un bateau.

159. Poulie mobile; assemblages de poulies. — Considérons une poulie mobile, c'est-à-dire dont l'axe n'est plus fixe, mais supporte une certaine charge, de poids R (*fig.* 17). Négligeons le frottement

Fig. 17.



du tourillon. La poulie est soumise aux forces P et Q et aux réactions de son axe. En prenant, comme au n° 155, les moments par rapport à cet axe, nous voyons d'abord que $P = Q$. Considérons maintenant tout le système formé par la poulie et son axe; il est soumis aux forces extérieures P, Q, R. Ces forces doivent former un système nul. Donc, R doit être dirigé suivant la bissectrice des brins et égal à

(20) $$R = 2P\cos\alpha.$$

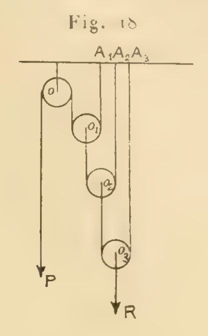
Pour une valeur donnée de R, la tension des brins est minimum et égale à $\frac{R}{2}$ pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand les brins sont parallèles, ce qui est généralement réalisé.

Dans la pratique, on utilise la poulie mobile en attachant l'extrémité du brin B à un point fixe et en faisant passer le brin A sur une poulie fixe, qui a simplement pour rôle de changer le sens de la tension. On suspend en O le poids R à soulever et l'on tire sur le brin libre de la corde. Une force $\frac{R}{2}$ est suffisante pour faire monter d'un mouvement uniforme le poids R. Mais il faut remarquer que, conformément au théorème des travaux virtuels, l'extrémité de la corde doit parcourir un chemin double de celui dont s'élève R. C'est ce que l'on exprime vulgairement en disant que ce que l'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.

On peut combiner plusieurs poulies mobiles, de manière à multiplier leurs effets, comme l'indique la figure 18. Le brin libre de

chacune d'elles est attaché à l'axe de la précédente et le poids R est suspendu à l'axe de la dernière. La tension de la corde est divisée

Fig. 18



par 2 quand on passe d'une poulie à la précédente. De sorte que la tension de la première corde est

$$P = \frac{R}{2^n}, \tag{21}$$

si n est le nombre des poulies mobiles. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier encore dans ce cas le théorème des travaux virtuels.

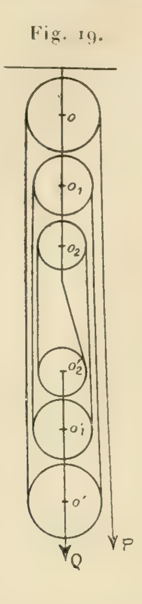
160. Ce dispositif est très avantageux; mais il est peu commode, à cause de la multiplicité des points fixes. On emploie de préférence le *palan* qui est constitué par deux *moufles* ou groupes de n poulies montées sur la même chape, soit avec des axes parallèles (*fig.* 19), soit avec le même axe (*fig.* 20) (les poulies étant, bien entendu, indépendantes). La moufle du haut est fixe; celle du bas supporte le poids Q à soulever. Une seule corde passe sur toutes les poulies: une de ses extrémités est fixe (on l'attache ordinairement à la chape de la moufle supérieure); sur l'autre, s'exerce la puissance P. La théorie générale de la poulie fixe ou mobile s'applique toujours et nous prouve que la tension est la même tout du long de la corde. Comme tous les brins sont sensiblement parallèles, la moufle inférieure est soumise à $2n$ tensions verticales dirigées de bas en haut et égales à P. Elle est soumise, d'autre part, au poids Q. On a donc, d'après les conditions universelles,

$$2nP = Q, \qquad P = \frac{Q}{2n}. \tag{22}$$

Vérifions, à titre d'exercice, le théorème des travaux virtuels. Si l'on

allonge le brin libre de x, la puissance effectue le travail Px. Si y est la quantité dont monte la moufle inférieure, le travail de la résis-

Fig. 19.



tance est $-Qy$. On doit donc avoir $Px = Qy$. Or, la distance des centres de deux poulies consécutives a diminué de y; donc les deux

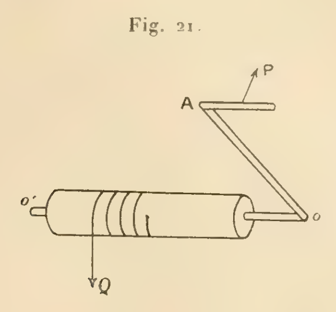
Fig. 20



brins tangents à ces deux poulies se sont raccourcis chacun de y. Le raccourcissement total de la longueur de corde enroulée est $2ny$; comme il est égal à l'allongement du brin libre, on a $x = 2ny$ et la formule à vérifier revient à (22).

161. Treuil. — Le treuil est un cylindre de révolution pouvant tourner autour de son axe, lequel est horizontal. Sur ce cylindre est enroulée une corde, dont une extrémité est libre et supporte le poids Q

Fig. 21.



à soulever et dont l'autre extrémité est fixée au treuil. Sur l'axe est calée une manivelle OA, à l'extrémité de laquelle est appliquée la puissance P. Négligeons les frottements des tourillons et écrivons que le moment résultant des forces P et Q par rapport à l'axe est nul. Si nous supposons, pour simplifier, que P est perpendiculaire à l'axe et à la manivelle (ce qui lui donne le plus grand moment), l'équation d'équilibre est, en appelant R le rayon du treuil et l la longueur de la manivelle,

$$(23) \qquad Pl = QR \qquad \text{ou} \qquad P = Q\frac{R}{l}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine qu'on arrive au même résultat par les travaux virtuels.

Au lieu d'appliquer au treuil la force P, on peut lui appliquer un couple moteur C et l'on a

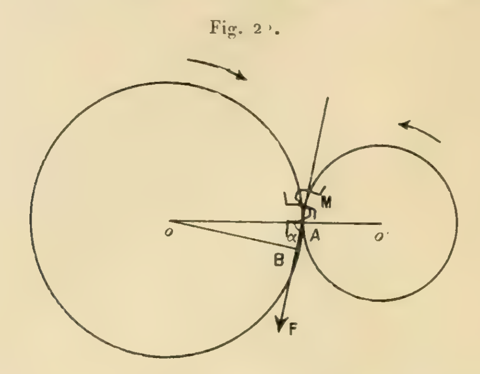
$$(24) \qquad C = QR.$$

Ces équations conviennent non seulement à l'équilibre, mais aussi à la rotation uniforme.

Le *cabestan* est un treuil à axe vertical, qui possède généralement quatre manivelles égales et à angle droit. Si la même force P est appliquée à chacune d'elles, on a un couple moteur $C = 4lP$, qu'il suffit de porter dans l'équation (24).

162. Engrenage. — Soient deux roues dentées, dont les axes O et O′ sont fixes et qui engrènent en A (*fig.* 22). Appliquons-leur les

Fig. 22.



couples C et C′ et cherchons la condition d'équilibre en négligeant les frottements. Le plus simple est d'employer les travaux virtuels. Si O tourne de l'angle ε, O′ tourne de $\frac{R}{R'}\varepsilon$ et en sens contraire, si, comme le suppose la figure, les roues sont tangentes extérieurement. Les travaux des deux couples sont $C\varepsilon$ et $-C'\frac{R}{R'}\varepsilon$. La condition d'équilibre est donc

$$(25) \qquad C - C'\frac{R}{R'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}.$$

Les couples doivent être de même sens et proportionnels aux rayons des roues, ou, ce qui revient au même, à leurs nombres de dents.

163. *Effort sur une dent.* — Soit F l'effort exercé par la roue O′ sur la roue O, en supposant, pour simplifier, qu'il n'y a qu'une seule paire de dents en contact. Son moment par rapport à O doit être égal et opposé au couple C. Or, on sait que la normale au point de contact M passe toujours par le point de contact A des circonférences primitives (nº 43). Soit α l'angle $\widehat{MAO'}$. Le bras de levier de F est, en négligeant le frottement, la distance de O à MA, soit $OB = R\sin\alpha$. On a donc

$$(26) \qquad C = FR\sin\alpha \qquad \text{ou} \qquad F = \frac{C}{R\sin\alpha}.$$

Le sens de la force F est d'ailleurs celui indiqué par la figure 22, en supposant, pour fixer les idées, que O′ est la roue menante et que les rotations ont lieu dans les sens indiqués par les flèches. La réaction de O sur O′ est, de même, égale à $\frac{C'}{R'\sin\alpha}$. En égalant à la valeur que donne (26), on retrouve (25).

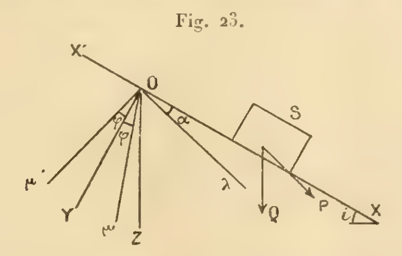
La formule (26) nous montre que, si l'on veut une pression constante sur les dents en prise, il faut que l'angle α reste constant pendant toute la durée du contact. Les dents en forme de développante de cercle (*cf.* Chapitre III, Exercice proposé n° 27) répondent seules à cette condition.

Dans la pratique, l'angle α est voisin d'un angle droit (75° pour les engrenages à développante de cercle) et l'on peut confondre son sinus avec l'unité. L'effort sur les deux dents en prise est alors $F = \frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$.

Rappelons que tout ce qui précède s'applique tant que les roues tournent d'un mouvement uniforme.

164. Plan incliné. — Soit un plan faisant l'angle i avec le plan horizontal et sur lequel repose un corps solide S de poids Q. Appliquons-lui une force quelconque P située dans le plan passant par son

Fig. 23.



centre de gravité et perpendiculaire aux horizontales du plan incliné et cherchons la condition d'équilibre, en supposant un coefficient de frottement uniforme f.

Les forces P et Q, se rencontrant, admettent une résultante. Nous supposerons que leur point de rencontre est assez près du plan incliné pour que cette résultante passe à l'intérieur de la base de sustentation (n° 143). La seule condition d'équilibre est alors que le rapport de la composante tangentielle à la composante normale soit plus petit que f en valeur absolue.

165. Pour définir avec précision la force P, choisissons un axe OX dirigé suivant la ligne de plus grande pente descendante et un axe OY perpendiculaire au plan et dirigé vers le bas (*fig.* 23). Nous appellerons P la mesure algébrique de la force donnée sur la demi-droite Oλ d'angle polaire α, cet angle pouvant être supposé compris entre o et π, si l'on accepte les valeurs négatives de P. En projetant les deux forces P et Q sur OX et sur OY, nous obtenons les composantes tangentielle et normale de leur résultante, soit

(27) $$F = P\cos\alpha + Q\sin i, \qquad N = P\sin\alpha + Q\cos i.$$

Posons, conformément à la méthode générale exposée au nº 132, $\frac{F}{N} = x$. Nous en tirons la valeur du rapport $\frac{P}{Q} = y$:

$$y = \frac{\sin i - x \cos i}{x \sin \alpha - \cos \alpha}. \tag{28}$$

Les valeurs de y convenant à l'équilibre sont celles qui correspondent aux valeurs de x comprises entre $-f$ et $+f$. En outre, comme la composante N doit être positive, on doit avoir

$$y > -\frac{\cos i}{\sin \alpha}. \tag{29}$$

Pour interpréter commodément ces conditions, considérons la courbe représentée par l'équation (28). C'est une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les droites

$$x = \cot \alpha, \tag{B}$$

$$y = -\frac{\cos i}{\sin \alpha}. \tag{A}$$

D'après (29), les points situés au-dessus de (A) seuls conviennent; nous n'avons donc à nous occuper que de la branche supérieure H de notre hyperbole, les points de la branche inférieure correspondant à un décollement entre le plan incliné et le corps S.

L'*arc d'équilibre* est la portion de H comprise entre les droites D et D' parallèles à Oy et d'abscisses respectives f et $-f$. Il faut connaître la position de (B) par rapport à ces droites, c'est-à-dire comparer $\cot \alpha$ à

$$f = \tang \varphi = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

et à

$$-f = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Nous aurons donc à tenir compte de la position de $O\lambda$ par rapport à l'angle $\mu O \mu'$ (*fig.* 23).

Si l'on calcule maintenant la dérivée $\frac{dy}{dx}$, on trouve qu'elle a le signe de $\cos(\alpha + i)$. Ce signe dépend donc de la valeur de α par rapport à $\frac{\pi}{2} - i$, c'est-à-dire de la position de $O\lambda$ par rapport à la verticale descendante OZ. La position relative de OZ et de $O\mu$ dépend d'ailleurs des valeurs relatives de i et de φ. Nous pouvons maintenant très aisément faire notre discussion.

166. I. $\varphi < i$. — *OZ est dans l'angle* $XO\mu$:

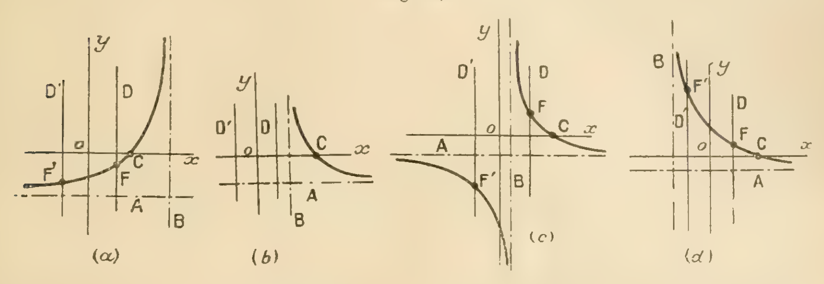
1° $O\lambda$ *est dans l'angle* XOZ. — Nous avons la figure 24, *a*. Elle nous montre qu'il y a un arc fini d'équilibre FF'. Le point de rencontre C de H avec Ox,

qui a pour abscisse tang$i$, est extérieur à cet arc. Les ordonnées des points F et F′,

$$(30)\qquad y_1 = \frac{\sin i - f\cos i}{f\sin\alpha - \cos\alpha}, \qquad y_2 = -\frac{\sin i + f\cos i}{f\sin\alpha + \cos\alpha},$$

sont toutes deux négatives. L'équilibre n'est possible que pour des valeurs de y comprises entre ces deux limites. Autrement dit, la force P doit être

Fig. 24.



dirigée vers le haut et comprise entre deux limites déterminées. Si elle dépasse, en valeur absolue, la limite supérieure $-y_2 Q$, le point représentatif M sort de l'arc d'équilibre par F′, x devient $< -f$, il y a glissement vers le haut.

Si, au contraire, $|P|$ est inférieure à $-y_1 Q$, M sort par F, x devient $> f$, il y a glissement vers le bas.

2° Oλ *est dans l'angle* ZOμ. — On a la figure 24, *b*. L'arc d'équilibre n'existe pas, H étant tout entière à droite de D. L'équilibre est impossible quelle que soit P ; il y a toujours glissement vers le bas.

3° Oλ *est dans l'angle* μOμ'. — On a la figure 24, *c*. L'arc d'équilibre est infini ; il est tout entier au-dessus de Ox. Si $P < Qy_1$, il y a glissement vers le bas. Si $P > Qy_1$, il y a équilibre. La force est alors dirigée vers le plan et l'équilibre persiste si grande que soit sa valeur ; il y a *arc-boutement* (n° **144**).

4° Oλ *est dans l'angle* μ'OX′. — Figure 24, *d*. Arc d'équilibre FF′. Conclusions analogues à celles de 1°, avec cette différence que y doit être positif pour l'équilibre ; autrement dit, la force doit être dirigée vers le plan. Si elle est trop faible, il y a glissement vers le bas ; si elle est trop forte, il y a glissement vers le haut.

Ce cas comprend le cas limite où Oλ *se confond avec* OX′. On a alors $\alpha = \pi$; l'équation (28) devient

$$(31)\qquad y = \sin i - x\cos i.$$

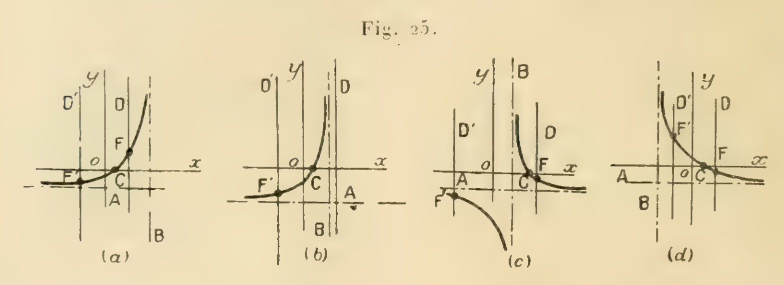
H est une droite. Mais, il n'y a rien à changer aux conclusions précédentes. Ce cas pourrait d'ailleurs aussi être considéré comme cas limite de 1°, pour $\alpha = 0$.

II. $\varphi > i$. — $O\mu$ *est dans l'angle* XOZ :

1° $O\lambda$ *est dans l'angle* $XO\mu$. — Figure 25, *a*. Arc d'équilibre FF'. La seule différence avec I, 1°, est que C appartient à cet arc; autrement dit, *il y a équilibre quand on supprime la force* P. Ce résultat est évidemment indépendant de α; nous devons donc le retrouver dans tous les cas qui vont suivre.

2° $O\lambda$ *est dans l'angle* μOZ. — Figure 25, *b*. Arc infini d'équilibre. Si $y < y_2$, il y a glissement vers le haut. Si $y > y_2$, il y a équilibre, si grande que devienne la force; il y a *arc-boutement*.

Fig. 25.

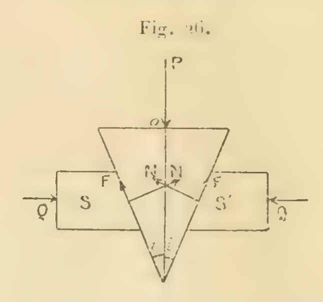


3° $O\lambda$ *est dans l'angle* $ZO\mu'$. — Figure 25, *c*. Arc infini d'équilibre. Conclusions analogues aux précédentes, sauf que le glissement a lieu vers le bas, quand $y < y_1$. Ce cas est aussi à rapprocher du cas I, 3°, dont il ne diffère que par le signe de y_1.

4° $O\lambda$ *est dans l'angle* $\mu' OX'$. — Figure 25, *d*. Conclusions analogues à celles du cas I, 4°. La seule différence est que C appartient à l'arc d'équilibre, la limite inférieure y_1 étant, par suite, négative.

167. Coin. — Le coin doit s'enfoncer entre les deux pièces S et S', qui sont limitées par des faces planes s'appliquant exactement sur les deux faces du coin (*fig.* 26). On exerce sur ce dernier une pression verticale P et les deux

Fig. 26.



pièces sont maintenues l'une contre l'autre par les forces horizontales Q, nécessairement égales, comme on le voit en appliquant les conditions universelles au système formé par le coin et les deux pièces.

La composante horizontale de la réaction du coin sur S doit être égale et opposée à Q, en vertu des conditions universelles appliquées à S. La composante verticale est égale à $\frac{P}{2}$, en vertu des mêmes conditions appliquées au coin et en admettant la symétrie des réactions sur S et sur S'. On peut dès lors considérer S comme un plan incliné, sur lequel repose le coin, dont le poids fictif est égal et opposé à Q et auquel est appliquée la force $\frac{P}{2}$. L'inclinaison i est le demi-angle au sommet du coin et l'angle α du numéro précédent est égal à $\pi - i$. Le rapport y est ici égal à $\frac{P}{2Q}$.

Appliquons les résultats de la discussion précédente. Nous avons à considérer la valeur de i par rapport à φ et à $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

1° $i < \varphi < \frac{\pi}{2} - \varphi$. — Nous sommes dans le cas II, 4°, du n° 166. Pour l'équilibre, y doit être compris entre les limites

$$(32) \qquad y_1 = \frac{\sin i - f \cos i}{f \sin i + \cos i}, \qquad y_2 = \frac{\sin i + f \cos i}{\cos i - f \sin i},$$

dont la première est négative et la seconde positive. Si $y > y_2$, il y a glissement vers le haut du plan incliné, c'est-à-dire que *le coin s'enfonce*. Si $y < y_1$, il remonte. Mais, ceci ne peut être obtenu qu'au moyen d'une traction sur le coin. Si, après avoir enfoncé le coin, on supprime la force P, le rapport y devient nul et l'équilibre persiste, si grande que soit la force Q; il y a *arc-boutement* par rapport à cette force. C'est ordinairement de cette manière que fonctionne un coin.

2° $\varphi < i < \frac{\pi}{2} - \varphi$. — Nous sommes dans le cas I, 4°. La seule différence avec le cas précédent est que $y_1 > 0$. Il faut donc exercer une certaine pression minimum pour empêcher le coin de remonter. Il n'y a plus arc-boutement par rapport à Q. Un tel coin serait inutilisable, puisqu'il remonterait aussitôt qu'on cesserait d'appuyer.

3° $i > \frac{\pi}{2} - \varphi > \varphi$. — Nous sommes dans le cas I, 3°. Le coin ne peut jamais s'enfoncer, si grande que soit la pression P. Il y a *arc-boutement* par rapport à cette force. Ce coin est évidemment encore moins utilisable que le précédent.

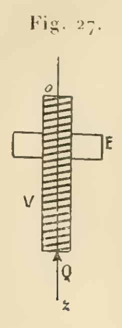
4° $\frac{\pi}{2} - \varphi < i < \varphi$. — Ceci suppose $\varphi > \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $f > 1$. Nous sommes dans le cas II, 3°. Ce coin ne peut jamais s'enfoncer. Il ne peut remonter qu'au moyen d'une traction. Il y a donc *arc-boutement* à la fois par rapport aux deux forces.

En résumé, le seul cas donnant un coin utilisable est le premier, c'est-à-dire

que *l'angle du coin doit être inférieur au double de l'angle de frottement*, ainsi qu'au double de son complément. La deuxième formule (32) donne alors *la pression qu'il faut exercer pour enfoncer le coin.*

168. Vis. — Soit une vis, de pas p, dont l'écrou est maintenu fixe. Appliquons-lui un couple C, ayant son axe parallèle à Oz (*fig.* 27)

Fig. 27.



et de même sens (le sens positif de rotation étant celui dans lequel il faut faire tourner la vis pour la faire avancer dans le sens Oz) et une force Q également parallèle à Oz, mais de sens opposé. Nous allons d'abord établir l'équation d'équilibre *en négligeant les frottements.* A cet effet, employons le théorème des travaux virtuels. Faisons tourner la vis de l'angle ε; elle avance de $p\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot$ Le travail du couple est $C\varepsilon$; celui de Q est $-Qp\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot$ En annulant la somme de ces deux travaux, nous obtenons l'équation d'équilibre :

$$C = Q\frac{p}{2\pi}\cdot \tag{33}$$

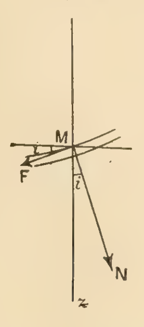
169. Reprenons maintenant la question *en tenant compte du frottement.* Nous nous bornerons au cas (le plus simple) de la vis à filet carré. Pour faciliter le langage, nous supposerons que Oz est la verticale descendante. Soit M un point quelconque du filet de la vis qui s'appuie sur l'écrou. Une petite aire environnant ce point est soumise, de la part de l'écrou, à une réaction normale N et à une force de frottement F. Nous compterons N positivement vers le bas, c'est-à-dire lorsque la face supérieure du filet de la vis appuie contre la face inférieure du filet de l'écrou. Nous compterons F positivement vers le bas, de sorte que F sera négatif quand la vis descendra.

Cela posé, le système formé par les forces N, F, Q et par le couple C doit être équivalent à zéro. Projetons d'abord sur Oz; si l'on appelle i l'inclinaison

des filets sur les sections droites, on a

$$(34)\qquad Q = \cos i . \Sigma N + \sin i . \Sigma F.$$

Fig. 28.



Prenons maintenant les moments par rapport à Oz; il vient, en appelant r le rayon moyen de la vis,

$$(35)\qquad C = r(\sin i . \Sigma N - \cos i . \Sigma F).$$

Posons

$$(36)\qquad x = \frac{\Sigma F}{\Sigma N}.$$

Comme chacun des rapports $\frac{F}{N}$ doit être compris entre f et $-f$, il doit en être de même de x. *Si x atteint f, la vis monte; si x atteint $-f$, la vis descend.*

Divisons (35) par (34); il vient, en posant

$$(37)\qquad y = \frac{C}{Qr},$$

$$(38)\qquad y = \frac{\sin i - x \cos i}{\cos i + x \sin i}.$$

En outre, pour savoir sur quelle face appuient les filets, calculons ΣN [1]; on trouve

$$(39)\qquad \Sigma N = Q(\cos i + y \sin i).$$

Suivant que l'inégalité

$$(40)\qquad y > -\cot i$$

---

[1] Cette quantité présente d'ailleurs de l'intérêt au point de vue de la résistance des filets. En la divisant par la longueur totale des filets de l'écrou, on a l'effort normal par unité de longueur de filet.

est ou n'est pas vérifiée, le contact a lieu sur la face supérieure ou inférieure des filets de la vis.

170. *Discussion.* — L'égalité (38) est identique à (28) si l'on prend $\alpha = \pi - i$. Nous sommes donc encore une fois ramenés à la théorie du plan incliné avec la même valeur de l'angle α que dans le cas du coin. Toutefois, la liaison étant actuellement bilatérale, nous sommes obligés de considérer toute l'hyperbole, dont nous n'avons envisagé qu'une branche au n° 165.

Nous avons à distinguer les mêmes cas qu'au n° 167.

1° $i < \varphi < \frac{\pi}{2} - \varphi$. — C'est le cas II, 4°, du n° 166. L'arc d'équilibre appartient tout entier à la branche II ; donc, la vis appuie sur l'écrou par la face supérieure de ses filets.

Les valeurs limites entre lesquelles y doit rester compris sont données par es formules (32). En les multipliant par Qr, on a les couples de démarrage, C_1 et C_2, qui sont respectivement négatif et positif. Si $C > C_2$, la vis descend ; si $C < C_1$, elle monte. Ce dernier mouvement ne peut être obtenu qu'avec un couple négatif. En particulier, si l'on annule C, la vis ne peut jamais remonter, si grande que soit la poussée Q ; il y a *arc-boutement par rapport à cette force*. Ceci explique clairement le fonctionnement des *vis de serrage*, qui ne peuvent pas se desserrer d'elles-mêmes, mais seulement avec l'aide d'un tournevis destiné à produire le couple négatif C_1.

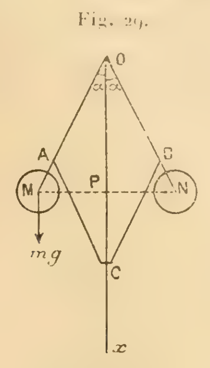
2° $\varphi < i < \frac{\pi}{2} - \varphi$. — Cas I, 4°. La seule différence est que $C_1 > 0$. Il n'y a plus arc-boutement par rapport à Q. Si l'on supprime le couple, la vis remonte. Une telle vis ne peut servir de vis de serrage. C'est pourquoi *les vis de serrage ont toujours un petit pas.*

3° $i > \frac{\pi}{2} - \varphi > \varphi$. — Cas I, 3°. Il faut considérer les deux branches de l'hyperbole, comme le montre la figure 24, *c*. Il y a équilibre lorsque C est $> C_1$ ou $< C_2$. Dans les deux cas, il y a *arc-boutement par rapport au couple*, c'est-à-dire qu'il est impossible de faire tourner la vis, soit dans un sens, soit dans l'autre, sans exercer une poussée Q. C'est le contraire de la vis de serrage. Si C est compris entre C_1 et $-Qr\cot i$, la vis monte, le contact ayant lieu sur la face supérieure des filets. Si C est compris entre $-Qr\cot i$ et C_2, la vis descend, le contact ayant lieu sur la face inférieure des filets.

4° $\frac{\pi}{2} - \varphi < i < \varphi$. — Cas II, 3° ; figure 25, *c*. Conclusions analogues aux précédentes, avec cette seule différence que les couples C_1 et C_2 sont tous deux négatifs. Si C est nul, il y a équilibre quel que soit Q. Il y a donc *arc-boutement* à la fois par rapport au couple et par rapport à la poussée.

171. Régulateur de Watt. — Les deux tiges OA, OB (*fig.* 29) peuvent tourner autour d'un axe O perpendiculaire à leur plan. Elles

Fig. 29.



supportent à leurs extrémités deux boules égales M, N. Elles sont articulées, en A et B, avec les tiges égales AC et BC, lesquelles sont également articulées en C avec un collier, qui peut coulisser le long de Ox et qui est relié aux organes de la machine de telle manière que, suivant qu'il monte ou qu'il descend, le couple moteur diminue ou augmente. Enfin, tout le système tourne autour de Ox avec une vitesse angulaire ω proportionnelle à celle de la machine.

Cherchons l'équation d'équilibre relatif, la vitesse ω étant supposée constante. Négligeons les masses des tiges vis-à-vis de celles des boules. Supposons enfin que la résistance opposée au collier C par les organes qu'il commande soit également négligeable.

Les réactions des tiges AC et BC sur C sont nulles, car leur résultante est nulle en vertu de la dernière des hypothèses ci-dessus. La réaction de OA sur AC est également nulle, parce que la réaction de C l'est et que la masse de AC est négligeable. Réciproquement, la réaction de AC sur OA est nulle et les seules forces, autres que la réaction de O, qui sont appliquées à cette tige, sont le poids mg de la boule M et la force centrifuge $m\omega^2.\overrightarrow{PM}$. Écrivons que leur moment résultant par rapport à O est nul :

$$mgl\sin\alpha = m\omega^2 l\sin\alpha . l\cos\alpha,$$

en posant $OM = l$. On tire de là

$$(41)\qquad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

L'angle α n'existe que si $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$. On choisit l assez grand pour qu'il en soit ainsi pour la valeur de ω qui correspond au régime normal de la machine. La formule (41) nous montre alors que si la vitesse augmente, les boules s'écartent, le collier monte, le couple moteur diminue et *vice versa*.

FIN DU TOME III.

ERRATA.

Tome I (*Cours*).

Page 346, ligne 9, *au lieu de* $\alpha^{\text{ième}}$ colonne, *lire* $\alpha'^{\text{ième}}$ colonne.

Tome II (*Cours*).

Page 9, ligne 2, *au lieu de* pose, *lire* porte.
Page 26, ligne 9, *au lieu de* P_2M_2, *lire* P_1M_2.
Page 35, ligne 9, supprimer la flèche au-dessus de x_0.
Page 36, ligne 17, *au lieu de* O', *lire* O.
Page 84, note 1, *au lieu de* t. III, *lire* t. IV, n° 105.
Page 105, ligne 2, en remontant, *au lieu de* ainsi, *lire* aussi.
Page 320, ligne 11, remplacer + par —.
Page 325, dernière ligne, *au lieu de* développées, *lire* développantes.
Page 389, ligne 12, *au lieu de* t. III, *lire* t. IV.
Page 634, ligne 6, en remontant, *au lieu de* t. III, *lire* t. IV.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

67066 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
67490 Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME III.

MÉCANIQUE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation reservés
pour tous pays.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES DE CINÉMATIQUE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On donne le mouvement défini par les équations*

$$(1) \qquad x = \frac{t^3}{3}, \qquad y = \frac{t^2}{2}, \qquad z = t^3 - 9t.$$

Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération. Dire quelle courbe est l'hodographe. Construire les diagrammes des vitesses et des espaces. Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération normale. En déduire l'expression du rayon de courbure en fonction de y.

Les composantes du vecteur vitesse sont

$$(2) \qquad x' = t^2, \qquad y' = t, \qquad z' = 3t^2 - 9.$$

Si, dans ces équations, on regarde x', y', z' comme des coordonnées courantes, elles constituent les équations paramétriques de l'hodographe. On en conclut que cette courbe est une *parabole*, dont le plan a pour équation

$$z = 3(x - 3),$$

dont l'axe se trouve dans le plan des zx (en changeant t en $-t$, on reconnaît, en effet, que ce plan est un plan de symétrie) et dont le sommet a pour coordonnées $(0, 0, -9)$.

Les composantes du vecteur accélération sont

$$(3) \qquad x'' = 2t, \qquad y'' = 1, \qquad z'' = 6t.$$

En dérivant encore une fois, on obtient les composantes (2, 0, 6) du vecteur accélération du point qui décrit l'hodographe. Le mouvement de ce point est uniformément varié (n° 18).

La vitesse v est donnée par la formule

$$(4) \quad v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = t^4 + t^2 + 9(t^2 - 3)^2 = 10t^4 - 53t^2 + 81.$$

On a ensuite

$$(5) \qquad s = \int_0^t v\, dt.$$

Pour construire les diagrammes, commençons par calculer le minimum de v. En annulant la dérivée de v^2 par rapport à t^2, on trouve que ce minimum est atteint pour

$$(6) \qquad t^2 = \frac{53}{20} = 2,65, \qquad t = 1,63.$$

La valeur correspondante de v est donnée par

$$(7) \qquad v^2 = -\frac{\overline{53}^2}{40} + 81 = 10,8, \qquad v = 3,3.$$

Cherchons maintenant une valeur asymptotique de v pour les grandes valeurs de t. Nous pouvons écrire

$$(8) \quad v = t^2\sqrt{10}\left(1 - \frac{5,3}{t^2} + \frac{8,1}{t^4}\right)^{\frac{1}{2}} = t^2\sqrt{10}\left(1 - \frac{2,65}{t^2} + \dots\right).$$

Nous avons donc la valeur asymptotique

$$(9) \qquad v_a = \sqrt{10}(t^2 - 2,65).$$

Si on l'applique pour $t = 4$, on trouve 42,3, alors que la valeur calculée d'après (4) est 42,4. La différence est pratiquement négligeable et l'on peut admettre la formule (9) pour $t > 4$. Cela revient à remplacer le diagramme des vitesses par sa parabole asymptote (t. II, n° 229).

Calculons maintenant les valeurs de v et de s (cette dernière quantité par la méthode des trapèzes), pour des valeurs de t échelonnées de demi-

seconde en demi-seconde et allant de o à 4. Nous avons la feuille de calculs ci-dessous, où toutes les multiplications ont été faites à la règle.

....	0	0,5	1	1,5	1,63	2	2,5	3	3,5	4
....		0,25	1	2,25		4	6,25	9	12,25	16
....		0,063	1	5,06		16	39	81	150	256
+ 81 ..		81,63	91	131,6		241	471	891	1581	2641
....		13,25	53	119		212	331	477	648	848
....		68,38	38	12,6		29	140	414	933	1793
....	9	8,3	6,2	3,6	3,3	5,4	11,8	20,4	30,6	42,4
v_1	17,3	14,5	9,8	6,9	8,7	17,2	32,2	51	73	
....	4,33	3,62	2,45	0,45	1,61	4,3	8	12,8	18,3	
....	0	4,33	7,95	10,4	10,8	12,5	16,8	24,8	37,6	55,8

Pour le calcul de Δs, on a multiplié $(v_0 + v_1)$ par $\frac{\Delta t}{2}$.

Les valeurs de s pour $t > 4$ sont données approximativement par la formule asymptotique

$$(10)\quad s = \sqrt{10}\int_4^t (t^2 - 2,65)\,dt + 55,8 = \sqrt{10}\left(\frac{t^3}{3} - 2,65\,t\right) + 21,9.$$

Les deux diagrammes sont reproduits sur la figure 1, entre les valeurs o et 4 de t. Les tangentes aux points A et B du diagramme des vitesses sont horizontales. La tangente en O au diagramme des espaces a pour coefficient angulaire 9; elle passe par le point T, qui correspond à $t = 1^s$ et $s = 9^m$. Le point C est un point d'inflexion, car la pente v y passe par un minimum. Avant C, la concavité est tournée vers le bas, car v décroît; au delà de C, elle est, au contraire, tournée vers le haut. La tangente en C a pour coefficient angulaire 3,3; elle passe par le point T′ correspondant à $t = 2^s,63$ et à $s = 14^m,1$.

Pour calculer l'accélération tangentielle, dérivons (4) :

$$vv' = 20\,t^3 - 53\,t;$$

d'où

$$(11)\qquad \gamma_T = v' = \frac{t(20\,t^2 - 53)}{v}.$$

Pour calculer l'accélération normale, nous calculons d'abord l'accélération totale

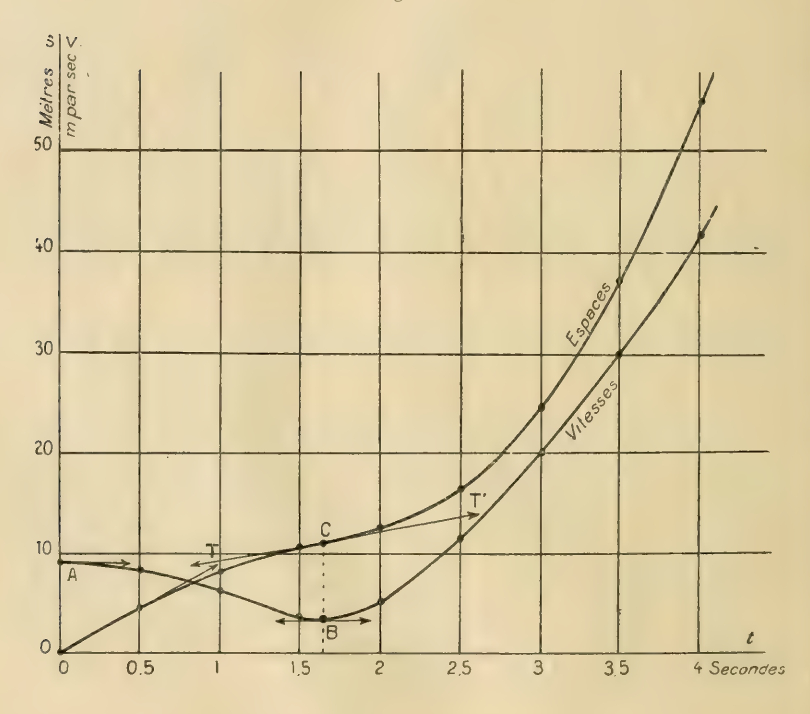
$$(12)\qquad \gamma^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = 40\,t^2 + 1.$$

Nous avons ensuite

$$(13)\quad \gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_T^2 = \frac{(40t^2+1)(10t^4-53t^2+81)-t^2(20t^2-53)^2}{v^2}$$

$$= \frac{10t^4+378t^2+81}{v^2}.$$

Fig. 1.



Pour avoir le rayon de courbure R, il nous suffit maintenant d'égaler ce résultat à $\frac{v^4}{R^2}$; on en tire

$$(14)\qquad R^2 = \frac{v^6}{10t^4+378t^2+81} = \frac{(40y^2-106y+81)^3}{40y^2+756y+81}.$$

2. *Construire les diagrammes des vitesses, des espaces et des accélérations tangentielles d'un mouvement, dont on a mesuré les vitesses,*

de seconde en seconde, les résultats de ces mesures, en mètres par seconde, étant consignés dans le Tableau ci-dessous :

t.	*v.*	*t.*	*v.*	*t.*	*v.*
0.........	0	7.........	52	14.........	26
1.........	29	8.........	40	15.........	24
2.........	55	9.........	38	16.........	24
3.........	62	10.........	32	17.........	25
4.........	68	11.........	30	18.........	26
5.........	63	12.........	28	19.........	25
6.........	55	13.........	25	20.........	24

A partir de la quinzième seconde, on peut considérer la vitesse comme pratiquement constante et égale à 25^{m} par seconde. Nous nous bornerons donc à construire les diagrammes jusqu'à $t = 15$.

Nous commençons par porter, sur du papier quadrillé, les points expérimentaux (marqués par des croix sur la figure 2). Puis, nous

Fig. 2.

traçons une courbe régulière passant aussi près que possible de ces points et en laissant à peu près autant d'un côté que de l'autre. Nous avons ainsi le *diagramme des vitesses*.

Pour construire le diagramme des espaces, nous lisons, sur le diagramme précédemment construit, les valeurs rectifiées des vitesses, pour les valeurs entières de t. Puis, nous intégrons par la méthode des trapèzes. Le résultat de ces lectures et calculs est consigné dans le Tableau ci-dessous :

t.	v.	Δs.	s.	t.	v.	Δs.	s.
0	0	15,5	0	8	43	40,2	402
1	31	41,7	15	9	37,5	35	442
2	52,5	57,8	57	10	32,5	31,3	477
3	63	64,5	115	11	30	29	509
4	66	64,5	179	12	28	27	538
5	63	59,5	244	13	26	25,7	565
6	56	52,5	303	14	25,5	25,3	590
7	49	46	356	15	25		616

Chaque Δs est égal à la demi-somme des v de sa colonne et de la colonne suivante.

Nous marquons maintenant tous les points (t, s) ainsi déterminés et nous les joignons par un trait continu. La courbe a une allure très régulière, bien qu'elle ait été construite d'une manière entièrement empirique. Il en est ainsi toutes les fois que l'on a affaire à une courbe obtenue par intégration ; cela tient à ce que les erreurs accidentelles se compensent sensiblement dans l'intégrale.

Au point A le plus haut du diagramme des vitesses, correspond le point d'inflexion B du diagramme des espaces. La tangente en ce point a pour coefficient angulaire 67, ordonnée de A ou vitesse maximum. Elle passe par le point ($t = 7,9$; $s = 173 + 67 \times 4 = 441$).

La tangente en O est Ot, puisque la vitesse initiale est nulle.

A partir de $t = 15$, le diagramme des espaces est une droite de coefficient angulaire 25.

Pour construire le diagramme des accélérations tangentielles, nous calculons les valeurs de $\frac{dv}{dt}$ pour les valeurs rondes de t. Pour $t = 0$, nous avons mené la tangente en O au diagramme des vitesses et avons évalué son coefficient angulaire, en lisant l'ordonnée du point d'abscisse 1. Pour les autres valeurs de t, nous avons pris comme valeur approchée de la pente la différence des ordonnées correspondant aux abscisses $t + \frac{1}{2}$ et $t - \frac{1}{2}$; c'est au moins aussi précis que de mener la tangente au sentiment et d'en mesurer le coefficient angulaire et c'est

plus simple. Les résultats de ces opérations ont été les suivants :

$$37,\quad 26,\quad 16,\quad 8,\quad 0,\quad -5,\quad -7,\quad -7,\quad -6,$$
$$-5,\quad -4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad -1,\quad 0.$$

Nous en avons déduit autant de points du diagramme cherché et nous avons joint ces points par un trait continu.

La courbe ne peut passer exactement par tous les points calculés. Cela tient à ce que la différentiation empirique est toujours une opération peu précise, contrairement à l'intégration.

Le point C de rencontre avec Ot correspond évidemment au point A du diagramme des vitesses.

3. *Déterminer le mouvement d'un point* M, *connaissant la trajectoire et un diagramme ou bien l'hodographe et un diagramme ou bien la trajectoire et l'hodographe.*

Faisons d'abord observer, au sujet des diagrammes, que si l'on connaît l'un quelconque d'entre eux, on peut en déduire les deux autres par dérivation ou intégration ; quel que soit le diagramme donné, nous pouvons donc supposer qu'*on les connaît tous les trois* et utiliser celui qui nous conviendra le mieux. Cela posé, examinons successivement les trois problèmes de l'énoncé.

I. *On donne la trajectoire et un diagramme.* — On connaît s en fonction du temps. Pour avoir la position du mobile au temps t, il suffit donc de rectifier la trajectoire.

II. *On donne l'hodographe et un diagramme.* — Soit m le point qui décrit l'hodographe. Le diagramme des vitesses donne Om en fonction de t. On pourra donc calculer les coordonnées de m en fonction du temps, en prenant l'intersection de l'hodographe avec une sphère de centre O et de rayon v. En intégrant ensuite ces trois coordonnées par rapport à t, on aura les coordonnées de M. La détermination des constantes d'intégration exigera qu'on se donne la position du mobile à un instant quelconque, par exemple, au temps zéro.

III. *On donne la trajectoire et l'hodographe.* — Imaginons qu'on ait exprimé les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de la trajectoire en fonction d'un paramètre quelconque u. Il s'agit de déterminer ce paramètre en fonction du temps, pour que les trois dérivées x', y', z' satisfassent aux deux équations de l'hodographe. Or, ces trois dérivées peuvent s'exprimer en fonction de u et de u', au moyen du théorème des

fonctions de fonction. En les portant dans les équations de l'hodographe, on obtient deux équations en u, u', qui doivent avoir au moins une solution commune en u', quel que soit u. (Ceci revient à dire que la parallèle menée par O à toute tangente à la trajectoire doit rencontrer l'hodographe, ce qui est bien évident *a priori*. Le cône de sommet O, ayant pour directrice l'hodographe, doit coïncider avec le cône directeur des tangentes à la trajectoire.) Si cette condition est remplie [1], on en tire une équation de la forme

(1) $$u' = f(u);$$

d'où

(2) $$t = \int \frac{du}{f(u)}.$$

Cette équation détermine la loi du mouvement.

4. *Déterminer le mouvement d'un point* M *sachant que l'hodographe a pour équations*

(1) $$y = x^2, \qquad xy = z\sqrt{3}$$

et le diagramme des vitesses

(2) $$3v^2 = t^3 - 1.$$ (É. P., 1906.)

C'est le problème II de l'exercice précédent. Nous avons

$$t^3 - 1 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3\left(x^2 + x^4 + \frac{x^6}{3}\right);$$

d'où

(3) $$t^3 = (1 + x^2)^3, \qquad t = 1 + x^2.$$

On pourrait maintenant exprimer x, y, z en fonction de t et remonter à la trajectoire par trois quadratures, comme il a été expliqué dans l'exercice précédent. Pour éviter l'introduction de radicaux, gardons x comme paramètre. Si X, Y, Z désignent les coordonnées du mobile M,

---

[1] Elle l'est toujours en Cinématique plane, puisque l'hodographe ne possède alors qu'une équation.

nous avons, en remarquant que $dt = 2x\,dx$,

$$(4)\quad \begin{cases} X = \int x\,dt = \int 2x^2\,dx = \dfrac{2x^3}{3}, \\ Y = \int y\,dt = \int 2x^3\,dx = \dfrac{x^4}{2}, \\ Z = \int z\,dt = \int \dfrac{2x^4}{\sqrt{3}}\,dx = \dfrac{2x^5}{5\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Les équations (3) et (4) nous donnent, en définitive, le temps et les coordonnées du mobile, en fonction du paramètre x. Nous connaissons donc *la trajectoire* (par ses équations paramétriques) *et la loi du mouvement* sur cette trajectoire.

On peut encore se proposer de chercher *le vecteur accélération.* Ses composantes sont

$$(5)\qquad x' = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x}, \qquad y' = \frac{dy}{dt} = 1, \qquad z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Si l'on mène ce vecteur par l'origine, on voit immédiatement que son extrémité, dont les coordonnées sont x', y', z', décrit une hyperbole équilatère, ayant pour équations

$$y = 1, \qquad xz = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5. *Un point* M *parcourt l'ellipse*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

de telle manière que l'hodographe soit un cercle de rayon R *et dont le centre, situé sur* Oy, *a pour ordonnée* eR, *e désignant l'excentricité de l'ellipse. Déterminer ce mouvement.*

Appliquons la méthode générale indiquée, dans l'Exercice n° 3, pour la solution du problème III. Prenons comme paramètre u l'angle d'anomalie excentrique de M (t. II, n° 529). Nous avons

$$(2)\qquad x' = -a\sin u . u', \qquad y' = b\cos u . u';$$

$$(3)\qquad x'^2 + y'^2 - 2e\mathrm{R}y' - \mathrm{R}^2\frac{b^2}{a^2} = 0,$$

en nous rappelant que $e = \frac{c}{a}$ (t. II, n° 534).

Portons (2) dans (3) :

$$(4)\qquad u'^2(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u) - 2eRb\cos u \,.\, u' - \frac{R^2 b^2}{a^2} = 0.$$

Résolvons cette équation du second degré par rapport à u' ou, mieux, par rapport à $\frac{1}{u'}$; il vient, tous calculs faits,

$$(5)\qquad \frac{1}{u'} = \frac{a^2}{Rb}(\pm 1 - e\cos u).$$

Si l'on change u en $\pi - u$, les signes du premier terme se permutent. Comme cela revient à remplacer le point M par son symétrique par rapport à Oy, on ne diminue pas la généralité de la solution en supprimant, par exemple, le signe $-$; nous avons alors

$$(6)\qquad \frac{Rb}{a^2}t = \int (1 - e\cos u)\,du = u - e\sin u,$$

en négligeant une constante d'intégration, qui reviendrait à changer l'origine des temps.

On reconnaît l'équation de Képler, caractéristique du mouvement des planètes (n° 94).

6. *Déterminer le mouvement d'un point* M *sur une courbe plane* C *donnée, connaissant, pour chaque position, l'angle* a *du vecteur vitesse avec le vecteur accélération.*

Première solution. — Utilisons les composantes intrinsèques du vecteur accélération (n° 8); nous avons

$$(1)\qquad \gamma\cos a = \frac{dv}{dt}, \qquad \gamma\sin a = \frac{v^2}{R}.$$

Éliminons l'inconnue γ :

$$(2)\qquad \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}\cot a = v^2 f(s).$$

$f(s)$ désignant une fonction connue de s, puisque l'on connaît, en fonction de cette variable, a et le rayon de courbure R.

Reste à intégrer l'équation (2), qui, si l'on remplace v par $\frac{ds}{dt}$, devient une équation différentielle du second ordre où ne figure pas t. On sait que, pour intégrer une telle équation, on prend s pour variable indépen-

dante et $\frac{ds}{dt}$ pour fonction inconnue (t. I, n° 195); autrement dit, nous devons éliminer le temps de l'équation (2), en y remplaçant dt par $\frac{ds}{v}$; nous obtenons ainsi

$$v\frac{dv}{ds} = v^2 f(s);$$

d'où

$$\frac{dv}{v} = f(s)\,ds,$$

(3) $$\log v = \int f(s)\,ds.$$

Ayant v en fonction de s, soit $v = g(s)$, on en tire

(4) $$t = \int \frac{ds}{g(s)}$$

et l'on connaît la loi du mouvement.

Deuxième solution. — Appelons x, y les coordonnées du point M au temps t. Les coefficients angulaires des vecteurs vitesse et accélération sont $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{y''}{x''}$; on doit donc avoir, en appliquant la formule (25) du n° 68 du Tome II,

(5) $$\tang\alpha = \frac{\frac{y''}{x''} - \frac{y'}{x'}}{1 + \frac{y''y'}{x''x'}} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'x'' + y'y''}.$$

Supposons maintenant que les équations paramétriques de la trajectoire soient

(6) $$x = f(u), \qquad y = g(u).$$

Nous avons

$$x' = f'u', \qquad y' = g'u', \qquad x'' = f'u'' + f''u'^2, \qquad y'' = g'u'' + g''u'^2.$$

Portons ces valeurs dans (5) :

(7) $$\tang\alpha = \frac{(f'g'' - g'f'')u'^2}{u''(f'^2 + g'^2) + u'^2(f'f'' + g'g'')}.$$

De cette équation on tire, puisque α est connu en fonction de u,

(8) $$u'' = \lambda u'^2,$$

A désignant une fonction connue de u. Cette équation s'intègre comme l'équation (2). On a successivement

$$(9) \qquad \log u' = \int A\, du = \log B, \qquad t = \int \frac{du}{B}.$$

7. Courbes de poursuite. — *Un point* P *décrit* Ox *avec une vitesse uniforme* V. *Un point* M *se meut dans le plan en se dirigeant constamment vers* P *et avec une vitesse* v *également constante. Connaissant les positions initiales des deux mobiles, déterminer le mouvement de* M. (C'est le mouvement d'un chien qui veut rattraper son maître.)

Prenons pour origine la position de P au temps zéro et prenons un axe Oy perpendiculaire à Ox. Introduisons l'angle polaire u du vecteur vitesse de M. Si x et y sont les coordonnées de ce point au temps t, la condition qui exprime que la vitesse de M est dirigée vers P s'écrit

$$(1) \qquad \frac{x - Vt}{\cos u} = \frac{y}{\sin u}.$$

D'autre part, en projetant le vecteur vitesse de M sur les axes, on a

$$(2) \qquad x' = v \cos u, \qquad y' = v \sin u.$$

Il s'agit d'intégrer le système des trois équations (1), (2), qui relient les quatre variables x, y, u, t. A cet effet, nous nous inspirons des principes généraux exposés au n° 348 du Tome II. La variable la plus facile à éliminer est le temps. Résolvons (1) par rapport à Vt :

$$(3) \qquad Vt = x - y \cot u;$$

puis, dérivons cette équation par rapport à t; il vient, en tenant compte de (2),

$$(4) \qquad V = v \cos u - v \cos u + y \frac{u'}{\sin^2 u} = y \frac{du}{\sin^2 u \,.\, dt}.$$

Pour éliminer dt, nous le tirons de la deuxième équation (2) :

$$(5) \qquad \sin u \,.\, dt = \frac{dy}{v}.$$

Portant dans (4), il vient

$$(6) \qquad V = \frac{vy\, du}{\sin u \,.\, dy}$$

ou

$$(7) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{v}{V} \frac{du}{\sin u};$$

d'où

$$\log y = \frac{v}{V} \log \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \log C \qquad (C = \text{const.});$$

d'où, en posant $\frac{v}{V} = m$,

$$(8) \qquad y = C\left(\operatorname{tang} \frac{u}{2}\right)^m.$$

Nous avons maintenant, en éliminant dt entre les deux équations (2),

$$dx = \cot u \, dy = \cot u \, my \frac{du}{\sin u} = mC \frac{\cos u \left(\operatorname{tang} \frac{u}{2}\right)^m}{\sin^2 u} du.$$

Pour intégrer, nous posons, suivant la méthode générale (t. I, n° 169),

$$(9) \qquad \operatorname{tang} \frac{u}{2} = z;$$

il vient

$$dx = Cm \frac{(1 - z^2) z^m}{2 z^2} dz;$$

d'où, en intégrant,

$$(10) \qquad x = C \frac{m}{2} \left(\frac{z^{m-1}}{m-1} - \frac{z^{m+1}}{m+1} \right) + x_1 \qquad (x_1 = \text{const.}).$$

Ceci suppose toutefois $m \neq 1$. Si $m = 1$, on a

$$(11) \qquad x = \frac{C}{2}\left(\log z - \frac{z^2}{2}\right) + x_1.$$

L'équation (8) s'écrit, d'autre part,

$$(12) \qquad y = C z^m.$$

Finalement, les équations (10) et (12) ou (11) et (12) constituent les *équations paramétriques de la trajectoire*. Il ne nous reste plus qu'à trouver la *loi du mouvement*, c'est-à-dire la relation qui lie t à z. Pour cela, nous nous servons de (3), qui nous donne

$$(13) \qquad Vt = x - C z^m \frac{1 - z^2}{2 z} = x_1 + \frac{C}{2}\left(\frac{z^{m-1}}{m-1} + \frac{z^{m+1}}{m+1} \right).$$

Dans le cas particulier où $m = 1$, on a

$$(14) \qquad Vt = \frac{C}{2}\left(\log z + \frac{z^2}{2} - 1\right) + x_1.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer les constantes d'intégration C et x_1. Soient (x_0, y_0) les coordonnées de la position initiale du point M. Si l'on fait $t = 0$ dans (3), on en tire

$$(15) \qquad \text{tang}\, u_0 = \frac{y_0}{x_0}.$$

Connaissant u_0, on peut en déduire z_0, d'après (9). Portant dans (12), on a C. Portant enfin dans (10) ou (11), on a x_1.

Par un changement d'origine des coordonnées, on peut évidemment s'arranger pour que x_1 soit nul. (Il faut remarquer que cela entraîne, en même temps, un changement d'origine des temps, puisque nous supposons toujours que cette dernière est l'instant où P passe à l'origine des coordonnées.) Par une homothétie, on peut ensuite ramener la constante C à être égale à 1.

Les trajectoires que nous venons de déterminer portent le nom de *courbes de poursuite*, qui rappelle leur origine. Elles sont algébriques et même unicursales lorsque m est commensurable et différent de 1. Par exemple, pour $m = 2$, on a une cubique.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On se propose de déterminer la loi d'un mouvement rectiligne. A cet effet, on note la position du mobile de demi-seconde en demi-seconde, pendant 10 secondes. On trouve que les chemins parcourus depuis l'origine sont, en mètres :

0, 4, 10, 20, 35, 52, 81, 100, 140, 170, 210, 250, 305, 350, 420, 470, 530, 590, 665, 750, 815.

Construire les diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations. Chercher une formule empirique susceptible de représenter approximativement le mouvement.

(On constatera que les deux derniers diagrammes sont à peu près des droites.)

2. Pour déterminer la loi d'un mouvement rectiligne, on mesure sa vitesse de seconde en seconde et l'on obtient les résultats suivants, en mètres par seconde :

89,2; 75; 65,3; 55,2; 47,2; 41; 35,4; 30; 25,5; 21,9; 19,5; 16,1; 14; 12,3; 10,1; 9; 7,3; 6,8.

Construire les diagrammes des vitesses et des espaces, puis le diagramme obtenu en portant les vitesses en abscisses et les espaces en ordonnées. De ce dernier, déduire une loi empirique du mouvement. (Le dernier diagramme est sensiblement une droite.)

3. Déterminer la loi d'un mouvement, connaissant la vitesse en fonction de l'espace. Applications :

(I) $v = 2s^2 + s + 3,$

(II) $v = 3s^2 - s,$

(III) $v = s^2 + 10,$

(IV) $v^2 = 2s^2 - 3,$

(V) $v^2 + 2s^2 = 4.$

4. Pour déterminer la loi d'un mouvement rectiligne, on a mesuré la vitesse pour des positions du mobile distantes les unes des autres de 20^{cm}. On a obtenu les résultats suivants, en mètres par seconde :

0, 165, 250, 330, 370, 402, 415, 442, 449, 460, 473, 476, 482, 486, 492, 507, 510, 515.

Construire les diagrammes des espaces et des vitesses.

5. Soient M la position d'un mobile au temps t et M′ sa position au temps $t + h$. Si, à partir du temps t, le mouvement avait été rectiligne et uniforme, le mobile aurait occupé, au temps $t + h$, une certaine position M″. Le vecteur $\overrightarrow{M''M'}$ porte le nom de *déviation* pendant l'intervalle considéré. Démontrer que, si h est infiniment petit principal, la partie principale de ce vecteur est $\frac{h^2}{2} \overrightarrow{\gamma}$.

6. On considère le mouvement défini par les équations

$$x = t^{2p}, \qquad y = t^p.$$

Calculer les composantes et les longueurs des vecteurs vitesse et accélération, ainsi que la vitesse aréolaire par rapport à l'origine et l'équation de l'hodographe. Examiner les cas particuliers correspondant aux valeurs suivantes de p : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Vérifier, dans le dernier cas, que l'on a l'identité $v = 3\gamma t$.

7. On considère le mouvement défini par les équations

$$x = 3t^2, \qquad y = 3t - t^3.$$

Calculer les composantes et les longueurs des vecteurs vitesse et accélération, l'accélération tangentielle, l'accélération normale, le rayon de courbure, la vitesse aréolaire par rapport à l'origine. Construire l'hodographe. Démontrer que le symétrique du vecteur vitesse par rapport à la droite D qui porte le vecteur accélération a une direction fixe. Démontrer que la droite D reste normale à une parabole d'axe Ox.

(*Bourses de licence*, 1903.)

8. On considère le mouvement défini par les équations

$$x = 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad y = 2(e^{-t} - e^{-2t}).$$

1° Construire la trajectoire. Calculer les coordonnées de son sommet S, du point P le plus éloigné de Ox et du point Q qui a même ordonnée que S. Calculer également les époques où le mobile M passe en ces trois points.

2° Calculer, en fonction du temps, le chemin parcouru par M et l'aire balayée par le vecteur OM. Calculer les limites de ces quantités pour t infini.

3° Construire les diagrammes des espaces et des vitesses. Vérifier que la vitesse passe par un minimum au point P et par un maximum au point Q.

(Extrait de l'épreuve pratique du *Certificat de Mathématiques générales*, Clermont-Ferrand, juin 1920.)

(Il est avantageux d'introduire, dans les calculs, la variable auxiliaire $z = e^{-t}$.)

9. On considère le mouvement défini par les équations

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = \cos^2 t.$$

Démontrer que la trajectoire, l'hodographe et le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse sont des biquadratiques situées chacune sur un cylindre de révolution. Quel est le lieu de l'extrémité du vecteur accélération? Calculer les accélérations tangentielle et normale; en déduire le rayon de courbure. (É. P., 1906.)

10. Établir la formule qui donne le rayon de courbure d'une courbe gauche (t. II, n° 327), en considérant cette courbe comme une trajectoire et calculant l'accélération normale par la formule

$$\gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_T^2.$$

(On utilisera l'identité de Lagrange.)

11. L'hodographe d'un mouvement se trouve sur le cône

$$x^2 = 2yz.$$

Démontrer que la trajectoire est une hélice et calculer les cosinus directeurs des génératrices de son cylindre rectifiant.

12. Un point décrit un cercle d'un mouvement uniformément accéléré (c'est-à-dire dont la vitesse est une fonction linéaire du temps). Trouver l'équation polaire de son hodographe et construire cette courbe. Calculer les accélérations tangentielle et normale.

13. Un point décrit la courbe

$$3x = \cos^3\varphi, \qquad 3y = \sin^3\varphi,$$

d'un mouvement uniformément varié. Calculer t en fonction de φ. Chercher l'hodographe. Vérifier que le cube de l'accélération totale est inversement proportionnel à x, dans le cas particulier où l'hodographe est un cercle.

14. Un point décrit la parabole $y^2 = 2x$ avec une vitesse constante égale à 1. Déterminer la loi du mouvement. Calculer les composantes du vecteur accélération en fonction rationnelle de y.

15. Déterminer la trajectoire d'un mouvement, sachant que $v = t$ et que l'hodographe a pour équations

$$y = 1, \qquad x^2 = 2z.$$

Montrer que cette trajectoire est une hélice et construire la section droite de son cylindre rectifiant. Chercher les lieux des extrémités des vecteurs vitesse et accélération. Calculer les accélérations tangentielle et normale, ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire.

16. Mêmes questions, avec l'hodographe

$$xy = 1, \qquad x^2 = 2yz.$$

17. Reprendre l'Exercice 15, en se donnant le diagramme des espaces

$$s = t + \frac{t^3}{6}.$$

18. Déterminer le mouvement d'un point sur une ellipse, sachant que

l'hodographe est un cercle passant par son centre et ayant son centre sur son grand axe. (*Cf.* Exercice résolu n° 5.)

19. Un cercle C, tangent en O à Oy, est parcouru par un point M de telle manière que l'hodographe par rapport à O soit le cercle C lui-même. Trouver la loi du mouvement. Construire les diagrammes des espaces et des vitesses. Calculer les composantes du vecteur accélération suivant les axes de coordonnées, ainsi que ses composantes intrinsèques. Vérifier que ce vecteur a constamment une longueur double du vecteur vitesse.

20. Déterminer le mouvement d'un point sur la parabole

$$y^2 = 2x,$$

en supposant que l'hodographe est cette parabole elle-même, puis qu'il a pour équation

$$x^2 = 2y.$$

21. Déterminer un mouvement plan, sachant que l'hodographe est un cercle, et que le vecteur accélération a une longueur constante. (Le mouvement sur l'hodographe est uniforme.)

22. Déterminer un mouvement plan, sachant que l'hodographe est un cercle et que l'accélération totale est liée à la vitesse par la relation $\gamma = v^2 - a^2$, a désignant la distance du centre du cercle à l'origine O. (Remarquer que γ est la vitesse du point m qui décrit l'hodographe et que $v = \mathrm{O}m$.)

23. Même question, en remplaçant a^2 par $a^2 + \mathrm{R}^2$.

24. Même question, l'hodographe étant une parabole et le rapport $\frac{\gamma}{v}$ étant constant. (La trajectoire est une courbe unicursale du sixième degré.)

25. Un point décrit une parabole avec une vitesse inversement proportionnelle à sa distance à l'axe. Montrer que le carré du temps est proportionnel au cube de la distance du point à la directrice. Construire l'hodographe.

26. Un point M décrit un cercle de centre O. Soit P le point de rencontre de OM avec la perpendiculaire au vecteur accélération menée par l'extrémité de ce vecteur. Déterminer le mouvement de manière que MP soit constant. Chercher l'hodographe. (L'hodographe est un cercle.)

27. Démontrer que, si un mouvement plan est tel que l'accélération fasse un angle constant avec la vitesse, l'hodographe est une spirale logarithmique. En supposant connue la trajectoire, déterminer la loi du mouvement. (*Cf.* Exercice résolu n° 6.)

28. Déterminer un mouvement satisfaisant à la condition précédente, en supposant que la trajectoire est :

1° Un cercle;

2° Une cycloïde.

29. Déterminer un mouvement plan tel que le triangle formé par la vitesse et l'accélération reste semblable à lui-même.

30. Déterminer le mouvement d'un point sur une parabole, sachant que l'extrémité du vecteur accélération normale décrit l'axe de la parabole. On calculera, en fonction de t, les coordonnées du mobile, ainsi que son abscisse curviligne.

31. Un point M décrit une courbe plane C, suivant la loi des aires par rapport à O. Montrer que l'hodographe est une courbe égale à la polaire réciproque de C par rapport à un cercle de centre O. [S'appuyer sur ce que le moment du vecteur vitesse par rapport à O est le double de la vitesse aréolaire (n° 7).]

32. Un point M décrit une ellipse E en obéissant à la loi des aires par rapport à un point quelconque P. Trouver la loi du mouvement, ainsi que l'hodographe. Calculer les composantes du vecteur accélération. Vérifier que ce vecteur passe par P et qu'il est proportionnel à $\frac{\text{PM}}{d^3}$, d désignant la distance de M à la polaire de P par rapport à l'ellipse. Cas où P est au centre ou en un foyer. [Introduire l'anomalie excentrique. Si x_0, y_0 sont les coordonnées de P, le double de la vitesse aréolaire est $(x-x_0)y'-(y-y_0)x'$.]

33. Même question pour une hyperbole.

34. Même question pour une parabole.

35. On reprend le point M de l'Exercice 31. Soient A le double de la vitesse aréolaire, ω l'angle polaire de M et r l'inverse de son rayon vecteur. Vérifier que le vecteur accélération passe par O et que sa mesure algébrique sur la demi-droite d'angle polaire ω est donnée par la for-

mule (de *Binet*)

$$\gamma = -A^2 r^2 \left(r + \frac{d^2 r}{d\omega^2} \right).$$

[Se servir des formules (19) et (20) du n° **10**. *Cf.* n° **69**.]

36. Déterminer le mouvement et calculer l'accélération dans l'hypothèse de l'exercice précédent et en supposant que la trajectoire est l'une des courbes suivantes :

1° $\rho \cos m\omega = 1$;

2° $\rho^m = \sin m\omega$; cas $m = \frac{1}{2}$ (cardioïde) et 2 (lemniscate).

37. Un point décrit la courbe

$$x = \operatorname{ch} z, \qquad y = \operatorname{sh} z,$$

de telle manière que sa projection sur xOy ait pour vitesse aréolaire $\frac{1}{2}$. Déterminer le mouvement. Chercher l'hodographe et les lieux des extrémités des vecteurs vitesse et accélération.

38. Un point M se meut sur le paraboloïde P

$$x^2 + y^2 = 2z.$$

Sa projection sur Oz a une vitesse v constante et sa projection sur xOy a une vitesse aréolaire constante A. Déterminer le mouvement. Quelle est la nature de la projection de la trajectoire sur xOy? Montrer que, si v et A varient proportionnellement, tous les vecteurs vitesses sont tangents à un même paraboloïde de révolution, de même axe et de même sommet que P. Quelle espèce de courbe est chaque hodographe? (Introduire les coordonnées semi-polaires. Comparer avec l'Exercice proposé n° **2** du Chapitre XXVII du Tome II.)

39. Un point M décrit, avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, la courbe

$$x = \sqrt{2} \cos \varphi, \qquad y = \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Calculer t en fonction de φ. Construire l'hodographe. Calculer, en fonction de φ, les composantes suivant les axes et les composantes intrinsèques du vecteur accélération.

40. On fait tourner le trièdre de référence de l'angle θ autour de Oz;

puis, on lui imprime la translation h suivant Oz. On obtient ainsi le trièdre AXYZ. On suppose que h et θ sont des fonctions connues du temps et l'on considère un point M qui se déplace, suivant une certaine loi, sur AX.

1° Déterminer cette loi pour que l'accélération et la vitesse absolues de M soient dans un même plan avec AX.

2° On suppose $h = k\theta$. Traiter complètement la question précédente, dans cette hypothèse. Calculer θ en fonction de t pour que l'accélération de M fasse, en outre, un angle constant avec AX.

CHAPITRE II.

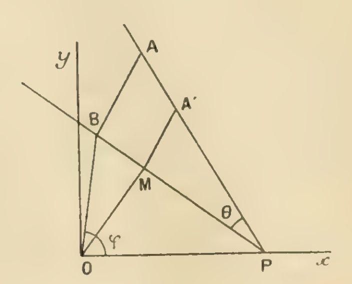
MOUVEMENTS PONCTUELS REMARQUABLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On compose trois mouvements vibratoires simples d'amplitudes respectives* 1, a, b *et de phases initiales* 0, 120°, —120°. *On suppose que* a *et* b *varient, de telle manière que le rapport* $\frac{b}{a}$ *garde une valeur constante* k. *Étudier les variations d'amplitude et de phase initiale du mouvement résultant. Calculer l'amplitude minimum et la phase correspondante. Quelles valeurs faut-il donner à* a *et à* b *pour qu'il y ait interférence?*

Appliquons la règle de Fresnel. Nous formons le contour polygonal OPAB (*fig.* 3). Le mouvement résultant est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Fig. 3.



Quand a et b varient dans les conditions de l'énoncé, le triangle PAB reste homothétique à lui-même, puisque le rapport $\frac{AB}{AP}$ reste égal à k. Le lieu du point B est la demi-droite PB. La variation des éléments du mouvement résultant devient alors évidente.

Si a croît de 0 à ∞, l'amplitude R de ce mouvement commence par

décroître à partir de 1, passe par un minimum, quand B est en M, projection de O sur PB, puis croît indéfiniment. Quant à la phase φ, elle croît constamment de $0°$ à $120° + \theta$, θ désignant l'angle $\widehat{APB}$. La valeur de φ qui correspond au minimum d'amplitude est $\widehat{POM} = 30° + \theta$. La valeur correspondante de a est PA′, le point A′ étant obtenu en menant MA′ parallèle à BA.

Pour qu'il y ait interférence, il faut et il suffit que B vienne en O. Le triangle PAB est alors équilatéral et l'on doit avoir $a = b = 1$.

Nous avons répondu à toutes les questions de l'énoncé. Toutefois, on peut se proposer de trouver les expressions analytiques, en fonction de k, des éléments correspondant au minimum d'amplitude, éléments que nous nous sommes contentés d'indiquer sur la figure et que l'on pourrait d'ailleurs, dans la pratique, mesurer avec une précision suffisante, sur un graphique exécuté à une assez grande échelle.

Si l'on préfère faire des calculs, au lieu de faire un dessin, on commence par calculer l'angle θ. La relation des sinus, appliquée au triangle PAB, donne

$$\frac{\sin\theta}{b} = \frac{\sin(60° + \theta)}{a} = \frac{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}{2a};$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{k\sqrt{3}}{2 - k}.$$

Ayant θ, l'amplitude minimum est donnée par le triangle rectangle OMP :

$$(2) \qquad R' = \sin(60° - \theta).$$

Quant à la phase φ' correspondante, nous avons vu qu'elle est égale à $30° + \theta$. Enfin, la valeur de a nous est donnée en appliquant la relation des sinus au triangle PMA′ et remarquant que $PM = \cos(60° - \theta)$:

$$\frac{ka}{\sin\theta} = \frac{\cos(60° - \theta)}{\sin 60°};$$

d'où

$$(3) \qquad a = \frac{2\sin\theta\cos(60° - \theta)}{k\sqrt{3}}.$$

Les formules (1), (2), (3) donnent tous les éléments demandés et sont toutes calculables par logarithmes.

On peut aussi suivre une voie purement analytique. L'élongation du

mouvement résultant est

$$x = \sin \omega t + a \sin(\omega t + 120^\circ) + ka \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$(4) \qquad x = \sin \omega t \left[1 - \frac{a}{2}(1 + k) \right] + a \cos \omega t \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - k).$$

On en déduit

$$(5) \qquad R^2 = a^2(k^2 - k + 1) - a(k + 1) + 1,$$

$$(6) \quad \cos \varphi = \frac{2 - a(1+k)}{2R}, \quad \sin \varphi = \frac{a\sqrt{3}(1-k)}{2R}, \quad \tang \varphi = \frac{a\sqrt{3}(1-k)}{2 - a(1+k)}.$$

En dérivant (5) par rapport à a, on pourra calculer le minimum d'amplitude. En portant ensuite dans (6), on aura la valeur correspondante de φ. Nous laissons au lecteur le soin de développer ces calculs et de comparer les résultats avec ceux de la méthode précédente.

2. *Un point* M *décrit un segment* AB *de* 12^{mm}, 7 *de long, alternativement dans les deux sens, avec une vitesse constante, qui est la même à l'aller et au retour. Il effectue, de la sorte,* 340 *vibrations par seconde. Chercher le fondamental et les harmoniques successifs de ce mouvement vibratoire.*

On peut procéder de deux manières : soit *chercher directement le développement de l'élongation* en série de Fourier; soit *chercher le développement de la vitesse et intégrer ensuite par rapport au temps.* Nous allons suivre cette seconde méthode, qui donne des calculs un peu plus simples.

Calculons d'abord la vitesse constante du mobile. En une seconde, il parcourt 680 fois le segment AB, c'est-à-dire 680 × 12^{mm}, 7 = 8636^{mm}. En unités C. G. S., sa vitesse est donc égale à 863,6. La fréquence est, d'autre part, égale à 340. Posons, dès lors (n° 26),

$$(1) \qquad u = 680 \pi t.$$

Posons, en outre,

$$(2) \qquad v = 863,6 y.$$

La fonction y de la variable u admet pour période 2π; elle est égale à $+1$, pour $0 < u < \pi$ et à -1, pour $\pi < u < 2\pi$. Appliquons, dès lors, les formules (33) du n° 26.

Nous avons d'abord

$$(3) \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos nu \, du - \int_{\pi}^{2\pi} \cos nu \, du \right] = 0,$$

car les intégrales du crochet sont nulles toutes deux, si $n \neq 0$, et elles sont égales et, par conséquent, se détruisent, si $n = 0$. Nous avons ensuite

$$(4) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin nu\, du - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nu\, du\right] = \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n}.$$

Si n est pair, $a_n = 0$; si n est impair, $a_n = \frac{4}{\pi n}\cdot$ On a donc

$$(5)\ y = \frac{4}{\pi}\left[\sin u + \frac{\sin 3u}{3} + \frac{\sin 5u}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n+1)u}{2n+1} + \cdots\right].$$

Portons dans (2) et intégrons par rapport à t; en tenant compte de (1) et posant, pour abréger l'écriture, le crochet égal à z, nous avons

$$x = 68 \times 12,7 \times \frac{4}{\pi}\int \frac{z\, du}{680\,\pi}$$

$$= C - \frac{5,08}{\pi^2}\left[\cos u + \frac{\cos 3u}{9} + \frac{\cos 5u}{25} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)u}{(2n+1)^2} + \cdots\right],$$

C désignant une constante d'intégration. Pour déterminer cette constante, faisons $u = \frac{\pi}{2}\cdot$ Le mobile doit se trouver au milieu de AB; de sorte que si nous prenons ce milieu pour origine des élongations, C doit être nulle [1].

Si nous revenons maintenant au millimètre pour unité de longueur, nous avons, en définitive,

$$(6)\ x = -\frac{50,8}{\pi^2}\left[\cos u + \frac{\cos 3u}{9} + \frac{\cos 5u}{25} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)u}{(2n+1)^2} + \cdots\right].$$

On voit que les harmoniques de rang impair seuls existent et que leur amplitude est inversement proportionnelle au carré de ce rang.

Nous conseillons au lecteur d'établir maintenant cette formule par l'application directe des formules (33) à x. Il remarquera que l'on a

$$x = \frac{12,7}{\pi}\left(u - \frac{\pi}{2}\right), \text{ pour } 0 < u < \pi$$

et

$$x = \frac{12.7}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - u\right), \text{ pour } \pi < u < 2\pi.$$

---

[1] On peut aussi calculer C par la formule

$$2\pi C = \int_0^{2\pi} x\, du.$$

3. *Construire les diagrammes des espaces et des vitesses du mouvement*

$$x = 238\,e^{-0,13t} \times \sin(1,95\,t), \tag{1}$$

en s'arrêtant à la fin de la période pendant laquelle le facteur d'amortissement atteint la valeur $\frac{1}{10}$.

Cherchons d'abord combien il faudra prendre de périodes. Le facteur d'amortissement devant être inférieur à $\frac{1}{10}$, son inverse doit être plus grand que 10; on doit donc avoir

$$0,13\,t \log e > 1 \qquad \text{ou} \qquad t > \frac{1}{0,13 \times 0,434} = 17,7.$$

D'autre part, la période est $\frac{2\pi}{1,95} = 3,222$. Elle est contenue environ 5,5 fois dans 17,7. Nous devons donc construire les diagrammes pendant six périodes.

Nous allons d'abord faire les calculs pour la première période; nous en déduirons les périodes suivantes au moyen du décrément.

Calculons la vitesse; nous avons, en posant $1,95\,t = \varphi$,

$$v = 238\,e^{-0,13t}[-0,13 \sin\varphi + 1,95 \cos\varphi]. \tag{2}$$

Elle s'annule pour

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1,95}{0,13} = 15;$$

d'où l'on déduit, à l'aide d'une table de tangentes naturelles,

$$\varphi = 95^{g},8; \qquad t = \frac{95,8 \times \pi}{200 \times 1,95} = 0,77. \tag{3}$$

Nous avons ensuite

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -238\,e^{-0,13t}[3,78 \sin\varphi + 0,507 \cos\varphi]. \tag{4}$$

Cette accélération s'annule pour

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{0,507}{3,78} = -0,134; \qquad \varphi = 191^{g},5; \qquad t = 1,54. \tag{5}$$

Nous calculons les valeurs de x et de v pour des valeurs de t échelonnées à $\frac{1}{10}$ de période les unes des autres, en y ajoutant les valeurs de t qui annulent x, v, γ.

Les calculs sont reproduits dans le Tableau ci-dessous :

t..........	0.	0.32.	0,64.	0.77.	0.97.	1,29.	1.54.	1.61.
ades).....	0	40	80	95,8	120	160	191,5	200
cos φ......	1	0,809	0,309	0,067	—0,309	—0,809	—0,991	—1
sin φ......	0	0,588	0,951	0,998	0,951	0,588	0,133	0
,0565 t...	0	0,0181	0,0362	0,0436	0,0548	0,0728	0,0869	0,0910
2,3766 — c.	2,3766	2,3585	2,3404	2,3330	2,3218	2,3038	2,2897	2,2856
antilog(d).	238	228,3	219	215,3	209,8	201,3	194,8	193
× b.....	0	134	208	215	199	118	26	0
× a......	1,95	1,58	0,603	»	—0,603	—1,58	—1,93	—1,95
× b......	0	0,08	0,124	»	0,124	0,08	0,02	0
Diff.......	1,95	1,50	0,479	»	—0,727	—1,66	—1,95	—1,95
× f.....	464	343	105	0	—152	—334	—380	—377

t..........	1,93.	2.25.	2.38.	2.58.	2.90.	3.15.	3.22.
ades)....	240	280	295,8	320	360	391,5	400
cos φ......	—0,809	—0,309	—0,067	0,309	0,809	0,991	1
sin φ......	—0,588	—0,951	—0,998	—0,951	—0,588	—0,133	0
,0565 t...	0,1090	0,1270	0,1345	0,1457	0,1637	0,1778	0,1818
2,3766 — c.	2,2676	2,2496	2,2421	2,2309	2,2129	2,1988	2,1948
antilog(d).	185,2	177,7	174,6	170,2	163,3	158,1	156,6
× b.....	—109	—169	—174	—162	—96	—21	0
× a......	—1,58	—0,603	»	0,603	1,58	1,93	1,95
× b......	—0,08	—0,124	»	—0,124	—0,08	—0,02	0
Diff.......	—1,50	—0,479	»	0,727	1,66	1,95	1,95
× f.....	—278	—85	0	124	271	309	305

Les lignes trigonométriques ont été prises dans une table de sinus naturels. Le nombre

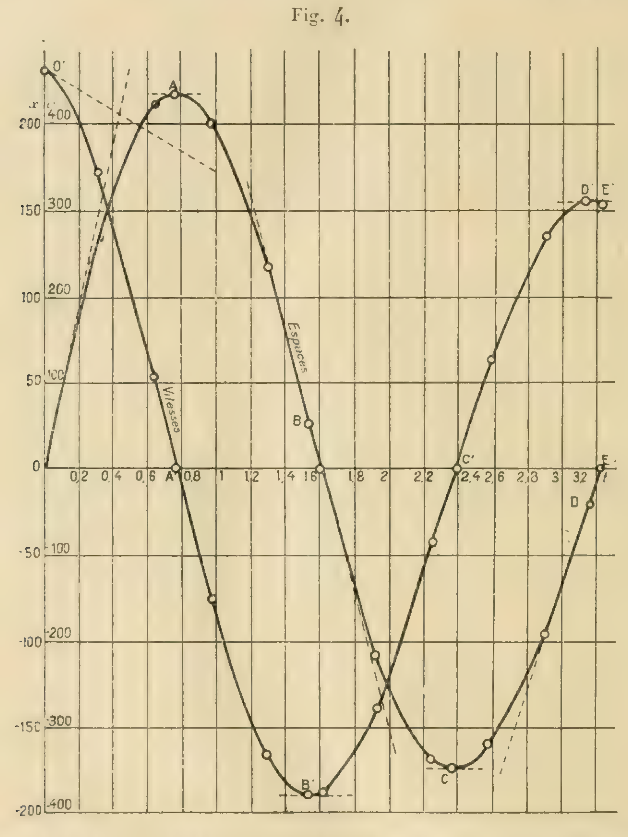
$$c = 0,13 \times 0,434\,t = 0,0565\,t$$

est le logarithme vulgaire de l'inverse du facteur exponentiel. En le retranchant du logarithme 2,3766 de 238, on obtient le logarithme d du facteur $e = 238\,e^{-0.13t}$. Le reste du Tableau se comprend de lui-même. Ajoutons que tous les produits ont été faits à la règle à calcul.

Sur la figure 4, on a construit, à grande échelle, les deux diagrammes pour la première période. Les points A et C du diagramme des espaces ont même abscisses que les points A′ et C′ où le diagramme des vitesses coupe l'axe des t. Les points B et D, qui correspondent aux points B′ et D′, sont des points d'inflexion. Nous avons construit les tangentes en ces deux points, au moyen des points (2,04; — 164) et (2,65; — 176).

Elles se confondent avec la courbe sur une grande longueur. Nous avons également construit la tangente en O, dont le coefficient angulaire est la

Fig. 4.



vitesse initiale 464 et la tangente en O′, dont le coefficient angulaire est l'accélération initiale

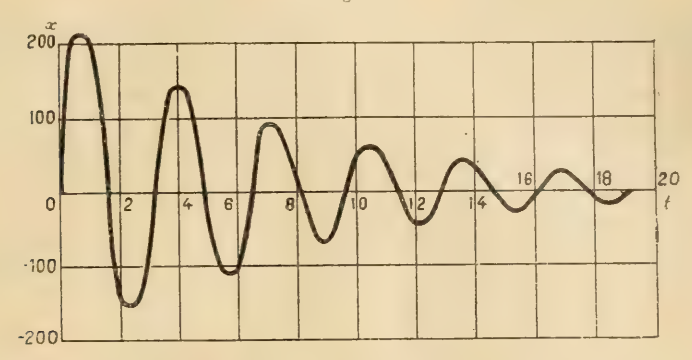
$$-238 \times 0,507 = -121.$$

Pour construire les diagrammes dans les cinq périodes suivantes, calculons le décrément. Son logarithme est $-0,1818$ (dernier nombre de la cinquième ligne du Tableau ci-dessus). Une table nous donne sa valeur : $D = 0,658$.

Comme la construction des diagrammes en dehors de la première période a simplement pour but de montrer l'allure générale de l'amortissement, une moins grande précision est nécessaire. On peut se contenter d'une plus petite échelle. En outre, nous nous sommes bornés à calculer les valeurs de x et de v pour les valeurs du temps qui annulent l'une ou

l'autre de ces quantités. On a ainsi les points de rencontre des deux diagrammes avec l'axe des t et les maxima et minima du diagramme des espaces. Quant aux maxima et minima du diagramme des vitesses, leurs abscisses sont légèrement inférieures aux valeurs de t qui annulent x, ainsi qu'il résulte du diagramme à grande échelle.

Fig. 5.



En ajoutant 1, 2, 3, 4, 5 périodes aux temps 0, 0,77, 1,61, 2,38 du Tableau reproduit plus haut et multipliant les valeurs correspondantes de x et de v par D, D^2, D^3, D^4, D^5, on obtient le Tableau suivant :

t.	x.	v.	t.	x.	v.
3,22.......	0	305	12,05.......	—50	0
3,99.......	141	0	12,89.......	0	87
4,83.......	0	—248	13,66.......	40	0
5,60.......	—114	0	14,50.......	0	—70
6,44.......	0	201	15,27.......	—33	0
7,21.......	93	0	16,11.......	0	57
8,05.......	0	—163	16,88.......	26	0
8,82.......	—75	0	17,72.......	0	—46
9,67.......	0	132	18,49.......	—21	0
10,44.......	61	0	19,33.......	0	37
11,28.......	0	—107			

Sur la figure 5, nous avons seulement reproduit le diagramme des espaces, pour éviter son enchevêtrement avec le diagramme des vitesses, lequel a d'ailleurs une forme analogue [1].

---

[1] Dans tout mouvement vibratoire amorti, le diagramme des vitesses peut se déduire du diagramme des espaces par une translation suivant l'axe des temps, accompagnée d'une réduction ou d'une amplification des ordonnées dans un rapport constant.

3. *On compose deux mouvements vibratoires simples, de périodes très voisines et s'effectuant suivant deux directions rectangulaires Ox et Oy. Étudier le mouvement résultant.*

Soient

$$(1) \qquad x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega' t, \qquad (\omega' = \omega + \varepsilon)$$

les équations des deux mouvements. Raisonnons comme au n° 25. Pendant une période T de x, la différence de phase varie très peu et l'on peut la considérer pratiquement comme constante. On est alors ramené au n° 31 et l'on sait que le mouvement résultant est une vibration elliptique. Mais, comme la trajectoire dépend de la différence de phase et que cette différence varie, dans le cas actuel, proportionnellement au temps, l'ellipse se déforme continuellement.

Pour étudier cette déformation, posons $\varepsilon t = k$. Les équations paramétriques de l'ellipse sont

$$(2) \qquad x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin(\omega t + k).$$

Comme x oscille entre $\pm a$ et y entre $\pm b$, on voit d'abord que l'ellipse est inscrite dans le rectangle CDC'D', dont les axes AA' et BB' ont pour

Fig. 6.

longueurs $2a$ et $2b$. Le point de contact M avec CD', par exemple, est obtenu pour $x = 1$, soit $t = 0$; d'où $y = b\sin k$. De même, N est donné par $\omega t + k = \frac{\pi}{2}$; d'où $x = a\sin k$. On a donc

$$(3) \qquad \overline{AM} = -\overline{A'M'} = b\sin k, \qquad \overline{BN} = -\overline{B'N'} = a\sin k.$$

On peut réunir ces deux formules en une seule, en remarquant que le point P, quatrième sommet du rectangle MCNP, décrit la diagonale OC

et, si $2c$ désigne la longueur CC′, on a

$$(4)\qquad \overline{\mathrm{OP}} = c \sin k.$$

Le point P, ainsi que les points M, N, M′, N′, sont animés de mouvements vibratoires simples, de fréquence $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \mathrm{F}$.

La connaissance des quatre points M, N, M′, N′ suffit pour déterminer entièrement l'ellipse et la variation de ces points suffit pour nous indiquer comment cette courbe se déforme. Complétons toutefois cette étude par l'étude de la variation des axes.

Si l'on élimine t entre les équations (2), on obtient l'équation de l'ellipse :

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\sin k + \frac{y^2}{b^2} - \cos^2 k = 0.$$

Si nous passons en coordonnées polaires, nous obtenons

$$(6)\qquad \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin 2\theta}{ab}\sin k + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{\cos^2 k}{\rho^2}.$$

Nous aurons les angles polaires des axes, en annulant la dérivée du premier membre par rapport à θ; on obtient ainsi, en posant $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} u$,

$$(7)\qquad \operatorname{tang} 2\theta = \sin k \operatorname{tang} 2u.$$

Cette formule nous montre que le grand axe, par exemple, qui est évidemment compris dans l'angle $\widehat{\mathrm{COD'}}$, si l'on suppose, pour fixer les idées, $a > b$, oscille périodiquement entre OC et OD′, la fréquence de l'oscillation étant la fréquence F trouvée plus haut. On peut d'ailleurs préciser ce mouvement, en disant que, si l'on prend la droite symétrique de Ox par rapport aux axes de l'ellipse, le point de rencontre de la droite obtenue avec CD′ est animé d'un mouvement vibratoire simple de fréquence F.

Signalons encore que, d'après le théorème de Monge, la somme des carrés des longueurs des axes est constante et égale à la somme des carrés des côtés du rectangle circonscrit, c'est-à-dire égale au carré de la diagonale CC′.

En résumé, le mouvement proposé a les apparences suivantes. Au début, le mobile décrit sensiblement l'ellipse E, d'axes AA′ et BB′. Puis, cette ellipse se déforme, en s'aplatissant, et son grand axe se rapproche de CC′. Au bout du temps $\mathrm{T} = \frac{1}{4\mathrm{F}}$, elle est infiniment aplatie, sui-

vant CC′. Puis, la déformation inverse se produit, suivie de la déformation symétrique par rapport à Ox, jusqu'à ce que l'ellipse soit infiniment aplatie suivant DD′, ce qui arrive au temps 3T. Enfin, l'ellipse revient vers sa forme initiale, qu'elle atteint au bout du temps 4T. Le phénomène se reproduit ensuite indéfiniment, avec la période 4T et la fréquence F, laquelle est égale à la différence des fréquences des mouvements vibratoires proposés.

Ce phénomène est, en somme, une extension du phénomène des battements étudié au n° 25.

Signalons, pour terminer, *le cas particulier* où $a = b$, c'est-à-dire le cas *où le rectangle circonscrit est un carré*. On a, dans cette hypothèse, $u = \frac{\pi}{4}\cdot$ Dès lors, la formule (7) nous montre que θ est aussi égal à $\frac{\pi}{4}\cdot$ Autrement dit, les axes de l'ellipse sont fixes et confondus avec les diagonales du carré, ce qu'on aurait d'ailleurs pu prévoir, en remarquant que tout carré circonscrit à une ellipse a nécessairement ses sommets sur les axes de cette courbe. La déformation est alors la suivante. La trajectoire est d'abord le cercle inscrit dans le carré. Puis, elle devient une ellipse, dont le grand axe est dirigé suivant CC′ et augmente. Au bout du temps T, elle est aplatie en CC′. Puis, son grand axe diminue et, au bout du temps 2T, elle est redevenue un cercle. Son grand axe passe ensuite sur DD′ et augmente. Au temps 3T, elle est aplatie en DD′ et enfin, au temps 4T, elle est redevenue un cercle.

4. *Étudier le mouvement résultant de la composition de deux mouvements vibratoires simples de directions rectangulaires et dont les périodes sont doubles l'une de l'autre.*

Soient

$$x = a \sin \omega t, \qquad y = b \sin(2\omega t + k) \tag{1}$$

les équations des deux mouvements.

Le mouvement résultant est un mouvement curviligne périodique, dont la période T est la plus grande des périodes des mouvements donnés, c'est-à-dire ici la période $\frac{2\pi}{\omega}$ de la vibration suivant Ox.

Si l'on augmente t de $\frac{T}{2}$, ωt augmente de π et $2\omega t$ de 2π; donc, x change de signe et y ne change pas. On en conclut qu'à deux époques distantes d'une demi-période, le mobile occupe deux positions symétriques par rapport à Oy.

La forme de la trajectoire dépend de la valeur de la constante k. Toutefois, si l'on augmente k de 2π, y ne change pas. Si on l'augmente seulement de π, y change de signe et l'on obtient un mouvement symétrique du premier par rapport à Ox. Enfin, si l'on change k en $-k$ et, en même temps, t en $-t$, x et y changent de signe; on obtient une trajectoire symétrique de la première par rapport à O ou, ce qui revient au même, par rapport à Ox, à cause de la symétrie du mouvement par rapport à Oy.

Il résulte de ces observations que l'on peut se borner à faire varier k de o à $\frac{\pi}{2}$, à une symétrie près par rapport à Ox.

Pour obtenir rapidement les principales formes de la trajectoire, on peut procéder de la manière suivante.

Traçons les parallèles à Oy, dont les abscisses sont les sinus des angles 0, 10^g, 20^g, ..., 90^g, 100^g et ces mêmes sinus changés de signe. Numérotons ces droites 0, 1, 2, ..., 9, 10 et -1, -2, ..., -9, -10. Ajoutons que l'unité de longueur adoptée doit être a.

Traçons ensuite les parallèles à Ox, dont les ordonnées sont les sinus des angles 0, 20^g, 40^g, ..., 100^g et ces mêmes sinus changés de signe, l'unité de longueur étant, cette fois, b. (Sur les figures 7 et 8, on a supposé $a=b$.) Numérotons-les 0, 2, 4, ..., 10 et -2, -4, ..., -10.

Ceci étant, *construisons la courbe* $k=0$. A cet effet, nous marquons les points situés à l'intersection des parallèles consécutives de la première famille avec les parallèles consécutives de la deuxième famille. Nous partons du numéro 0 dans chaque famille. En outre, quand nous arrivons au numéro 10 ou au numéro -10, nous revenons en arrière. Il est clair que les points ainsi marqués sont les positions du mobile aux époques 0, $\frac{T}{40}$, $\frac{2T}{40}$, $\frac{3T}{40}$, ..., $\frac{39T}{40}$, T. En les joignant par un trait continu, nous avons la trajectoire complète (*fig.* 7). Nous savons en outre que les points marqués sont atteints à des époques équidistantes.

Si nous voulons maintenant la trajectoire qui correspond à $k=20^g$, il suffit de reprendre le même canevas de parallèles; mais on part, cette fois, du numéro 0 pour la parallèle à Oy et du numéro 2 pour la parallèle à Ox. De même, pour avoir les courbes qui correspondent à des valeurs de k égales à 40^g, 60^g, 80^g, 100^g, on part toujours du numéro 0 pour la parallèle à Oy, mais du numéro 4, 6, 8 ou 10 pour la parallèle à Ox. On obtient ainsi les cinq types de trajectoires de la figure 8. (On n'a pas reproduit, sur cette figure, les canevas de parallèles; on s'est borné à tracer le carré circonscrit à la trajectoire.)

On imagine aisément les formes intermédiaires.

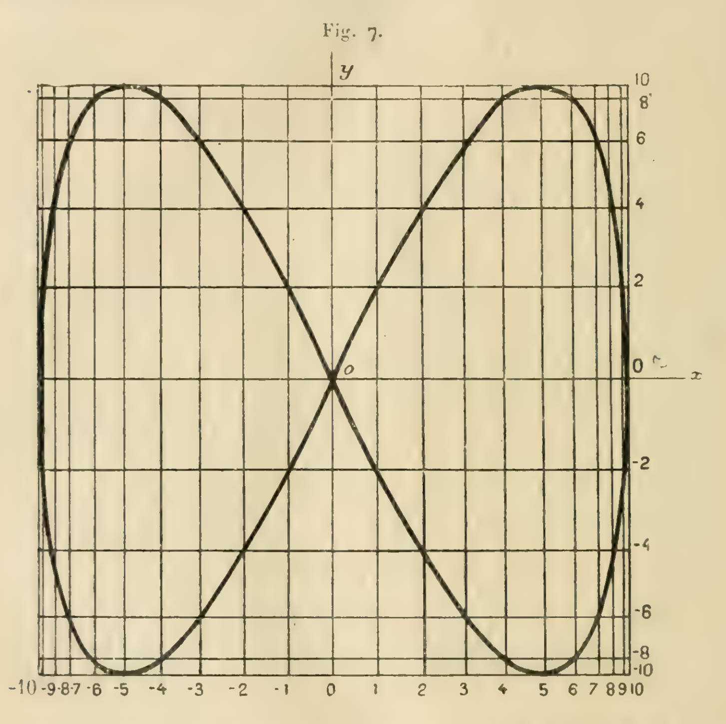
La dernière courbe ($k=100^g$) est une parabole. En effet, pour cette

valeur de k, on a

$$y = b\cos 2\omega t = b\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right),$$

ce qui est bien l'équation d'une parabole.

Fig. 7.



On peut réaliser pratiquement toutes ces formes de courbes, en combinant deux mouvements vibratoires dont le rapport des périodes est très

Fig. 8.

k=20° k=40° k=60° k=80° k=100°

voisin de 2. En raisonnant comme à l'exercice précédent, on voit que, pendant la durée d'une période, tout se passe sensiblement comme si le rapport des fréquences était rigoureusement égal à 2, l'angle de décalage k variant proportionnellement au temps. La trajectoire véritable se com-

pose d'une succession d'arcs de courbes, reproduisant à peu près la suite des trajectoires de la figure 8, complétées par symétrie par rapport à Ox.

En faisant vibrer des miroirs fixés à des diapasons, on peut réaliser matériellement des mouvements de cette sorte. C'est l'expérience connue, dans les Cours de Physique, sous le nom de *figures de Lissajoux*.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, de vitesse v suivant la direction de cosinus directeurs (a, b, c); au temps o, il se trouve en $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Un autre mobile M' est animé d'un mouvement analogue de vitesse v', suivant la direction (a', b', c') et avec la position initiale $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$. Trouver la condition de rencontre des deux mobiles.

2. Montrer que le milieu des deux points M et M' de l'exercice précédent est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, dont on déterminera le vecteur vitesse en fonction des vecteurs vitesses de M et de M'.

3. On dit que deux mouvements sont tangents au temps t si, à cette époque, les deux mobiles ont même position et même vecteur vitesse. Écrire les équations du mouvement rectiligne et uniforme tangent, au temps t_0, à un mouvement donné par ses équations.

4. On dit que deux mouvements sont osculateurs au temps t si, à cette époque, les deux mobiles ont même position, même vecteur vitesse et même vecteur accélération. Écrire les équations du mouvement uniformément varié osculateur, au temps t_0, à un mouvement donné par ses équations. Montrer que la trajectoire de ce mouvement uniformément varié est la parabole osculatrice à la trajectoire du mouvement proposé, dont l'axe est parallèle au vecteur accélération à l'instant t_0 considéré.

5. Un point M est animé d'un mouvement uniformément varié. Quels sont les mouvements des extrémites des vecteurs vitesse et accélération, supposés menés par M ?

6. Deux points M et M' sont animés chacun d'un mouvement uniformément varié.

1° Quel est le cône directeur de la surface réglée engendrée par MM' ?

2° Quel est le mouvement du point P qui divise MM' dans un rapport donné ?

Examiner les cas particuliers suivants :

1° Les points M et M′ ont même vecteur accélération. Montrer que le plan de la trajectoire du point P enveloppe un cylindre parabolique.

2° Le mouvement du point M′ est rectiligne.

3° Les mouvements des deux points sont rectilignes.

7. Un point M est animé d'un mouvement uniformément varié. On le joint à un point fixe P du plan de sa trajectoire. Calculer, en fonction du temps, l'aire balayée par le vecteur PM. Où doit se trouver le point P pour que cette aire soit proportionnelle au cube de t, en choisissant convenablement l'origine des temps et l'origine des rayons vecteurs? (Le point P doit se trouver sur une parabole de même axe et de même sommet que la trajectoire et de paramètre double.)

8. Démontrer que tout mouvement rectiligne satisfaisant à la relation

$$v^2 = 2\gamma x$$

est uniformément varié.

9. Un point M a pour vecteur accélération (24, — 53, 74). Sa vitesse initiale a pour composantes (57, 89, — 62). Construire ses diagrammes des vitesses et des accélérations tangentielles.

10. On donne les élongations à trois instants donnés d'un mouvement vibratoire simple. Comment peut-on déterminer ce mouvement? Examiner le cas particulier où les trois instants sont équidistants.

11. Un point M est animé d'un mouvement vibratoire simple, de fréquence 226. Son élongation au temps 0 est de $5^{cm},6$ et sa vitesse est de $-23^{m},8$ par seconde. Déterminer ce mouvement et construire ses diagrammes des espaces et des vitesses.

12. Montrer que, dans tout mouvement vibratoire simple, le diagramme qui donne la vitesse en fonction de l'élongation peut être un cercle, si l'on choisit convenablement les échelles. Comment trouve-t-on la phase sur ce diagramme?

13. Trouver l'équation d'un mouvement vibratoire simple, sachant que le diagramme qui relie la vitesse à l'élongation est un cercle de 12^{cm} de rayon, l'échelle des élongatious étant la grandeur naturelle et l'échelle des vitesses étant de 1^{cm} pour une vitesse de $4^{m},35$ par seconde. On sait, en outre, que la position initiale du point qui décrit le diagramme considéré a pour angle polaire 38°.

14. On compose deux mouvements vibratoires simples de même période, d'amplitudes R et R′ et de phases initiales u et u'. Écrire les formules qui donnent l'amplitude et la phase initiale du mouvement résultant. En déduire les valeurs de l'angle de décalage qui donnent l'amplitude résultante maximum ou minimum, ainsi que les conditions d'interférence.

15. Deux mouvements vibratoires simples ont pour amplitudes respectives 26 et 18 et pour fréquence commune 146. Construire leurs diagrammes des espaces, ainsi que le diagramme du mouvement résultant, en supposant que l'angle de décalage a successivement les valeurs suivantes : 0, 45°, 90°, 135°, 180°.

16. Calculer l'amplitude et la phase initiale du mouvement résultant des mouvements vibratoires simples de même période, dont les amplitudes et les phases initiales ont les valeurs suivantes :

$$(25, 0); \quad (40, 58°); \quad (10, 154°); \quad (18, 327°).$$

17. On compose trois mouvements vibratoires simples de même période et d'amplitudes constantes a, b, c. On suppose, en outre, que les phases initiales sont 0, u, $2u$. Étudier comment varient l'amplitude et la phase du mouvement résultant, quand on fait varier u. Cas particulier où $c = a$. (En appliquant la règle de Fresnel, on trouve aisément que l'extrémité du vecteur représentatif du mouvement résultant décrit un limaçon de Pascal. Dans le cas particulier, le pôle de ce limaçon est en O; la phase du mouvement résultant est égale à u.)

18. On compose le mouvement vibratoire

$$x = 22{,}7 \sin(434t) + 33{,}8 \cos(434t)$$

avec un mouvement de même direction et de période un peu plus petite. On compte 100 battements en 62 secondes. On mesure, en outre, l'amplitude minimum 12,4 et l'on constate que l'amplitude maximum dépasse 70. Déterminer le second mouvement.

19. Étudier le mouvement

$$x = a \sin \omega t + b \sin 2\omega t.$$

Discuter suivant la valeur du rapport $\frac{a}{b}$.

20. Même question pour le mouvement

$$x = a \cos \omega t + b \cos 3\omega t.$$

21. On compose deux mouvements vibratoires simples de même direction, de même amplitude, de phases initiales nulles et de fréquences doubles l'une de l'autre. Construire, sur le même graphique, les diagrammes des mouvements composants et résultant.

22. Trouver les harmoniques des mouvements suivants :

$$x = \sin^3 \omega t, \qquad x = \cos^4 \omega t, \qquad x = \sin^2 2\omega t \cos^3 \omega t.$$

23. Un point M vibre sur un segment de $12^{mm},7$ de long, avec une fréquence égale à 340. Le mouvement est uniforme dans les deux sens; mais, la vitesse dans un sens est double de la vitesse dans l'autre sens. Trouver les harmoniques.

24. Un point M vibre sur un segment AB, de milieu O et de longueur $36^{mm},4$, avec une fréquence égale à 235. De O à B, le mouvement est uniformément retardé, la vitesse en B étant nulle; de B à O, le mouvement est uniformément accéléré, la vitesse en O redevenant égale à ce qu'elle était primitivement. De O en A et de A en O, on a un mouvement analogue. Trouver les harmoniques.

(On pourra d'abord chercher le développement de la vitesse, puis intégrer une fois, ou bien chercher le développement de l'accélération, puis intégrer deux fois. *Cf.* Exercice résolu n° 2.)

25. Calculer l'accélération en fonction de la vitesse et de l'élongation dans un mouvement vibratoire amorti.

26. Construire les diagrammes des espaces et des vitesses d'un mouvement vibratoire amorti, dont la fréquence est de 6 vibrations par seconde et dont le décrément est 0,9. Au bout de combien de temps l'amplitude est-elle réduite au $\frac{1}{100}$ de sa valeur initiale?

27. Étendre la règle de Fresnel à la composition de deux mouvements vibratoires amortis, de même direction, de même période et de même décrément.

28. Étudier le mouvement résultant des deux mouvements précédents, en supposant que les périodes ne sont pas égales, mais seulement très voisines.

29. On compose deux mouvements vibratoires amortis, de décréments différents et de périodes quelconques. Montrer qu'au bout d'un temps suffisamment long, le mouvement résultant se réduit sensiblement à celui des mouvements proposés qui a le plus grand décrément.

(Mettre en facteur l'exponentielle qui a le plus faible exposant.)

30. Composer un mouvement vibratoire simple d'amplitude 1, de fréquence 88 et dirigé suivant Ox avec un mouvement vibratoire simple de même fréquence, d'amplitude 0,82, dirigé suivant une droite Oz inclinée à 53° sur Ox et en avance sur le premier de $\frac{3}{20}$ de période.

On calculera, en particulier, les époques où le mobile passe aux sommets de la trajectoire, ainsi que les coordonnées de ces sommets.

(Pour avoir les époques de passage aux sommets, écrire que la vitesse est perpendiculaire à l'accélération, ou, ce qui revient au même, que la vitesse est maximum ou minimum.)

31. Même question pour trois mouvements dirigés suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et dont les amplitudes et phases initiales respectives sont (1, 0); (1,34, 36°); (0,78, — 58°).

32. On compose deux mouvements vibratoires simples rectangulaires, dont les amplitudes, phases initiales et fréquences sont respectivement (2, 90°, 100) et (1, 0, 101). Construire la trajectoire entre les époques 0 et 0,01 ; 0,12 et 0,13 ; 0,24 et 0,25.

33. Un point M décrit une ellipse suivant la loi des aires par rapport au centre et à la vitesse de 1 tour par seconde. En même temps, l'ellipse tourne autour de son centre avec la vitesse uniforme de 1 tour par seconde. Quel est le mouvement résultant du point M ? (Mouvement circulaire uniforme.)

34. On reprend le point M précédent et, sur la perpendiculaire menée par M au plan de l'ellipse, on considère un point P animé d'un mouvement vibratoire simple de fréquence 2. Quel est le mouvement résultant du point P ? (Vibration elliptique.)

35. Un point M vibre sur OX, le centre de la vibration étant à la distance a de O, l'amplitude étant b et la fréquence 1. En même temps, OX tourne autour de O avec une vitesse uniforme de 1 tour par seconde. Étudier le mouvement résultant. (La trajectoire est un limaçon de Pascal.)

36. Un point M décrit un cercle d'un mouvement uniforme, à la vitesse de 1 tour par seconde. En même temps, le centre de ce cercle est animé d'un mouvement vibratoire elliptique de fréquence 1. Étudier le mouvement résultant. Examiner le cas particulier où le plan de la vibration elliptique coïncide avec le plan du cercle, ainsi que le cas où cette vibration se réduit à une vibration rectiligne située dans le plan du cercle ou perpendiculaire à ce plan.

37. Étudier le mouvement résultant de deux mouvements vibratoires simples de directions rectangulaires et dont le rapport des périodes est 3 ou bien $\frac{2}{3}$. (*Cf.* Exercice résolu n° 4.)

38. Étudier le mouvement résultant de deux mouvements vibratoires amortis, de même période et de même décrément, mais de directions rectangulaires, et décalés de $\frac{\pi}{2}$ l'un par rapport à l'autre. (La trajectoire est une spirale logarithmique, parcourue avec une vitesse angulaire uniforme.)

39. Un cercle de 20^{cm} de rayon est parcouru par un point M, d'un mouvement uniforme, à la vitesse de 800 tours par minute. En même temps, le cercle est animé d'une translation uniforme, suivant une direction perpendiculaire à son plan et dont la vitesse est de 10^{m} par seconde. Calculer le pas, la vitesse et l'accélération du mouvement résultant.

CHAPITRE III.

CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, au moyen de la composition des mouvements.*

Soit le point M de coordonnées polaires r et θ par rapport aux axes fixes Oxy. Nous nous proposons, comme au n° **10**, de calculer les composantes de son vecteur vitesse et de son vecteur accélération suivant les axes OXY, d'angles polaires respectifs θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$. Mais, au lieu de suivre une méthode directe, nous allons nous appuyer sur la composition des mouvements, en prenant comme *mouvement d'entraînement intermédiaire le mouvement de l'angle* OXY *par rapport à* Oxy, qui est une rotation, de vitesse angulaire $\omega = \theta'$.

Pour le vecteur vitesse, le résultat est immédiat. La vitesse relative du point M est un vecteur porté par OX et de mesure algébrique r'. Sa vitesse d'entraînement est un vecteur parallèle à OY et de mesure algébrique $r\omega = r\theta'$. La vitesse absolue étant la somme de ces deux vecteurs, on retrouve les formules du n° 10.

Passons au vecteur accélération. A cet effet, *nous allons nous servir de l'hodographe.* Nous menons le vecteur $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{MV}$ et il nous faut prendre la vitesse du point m. Pour cela, nous appliquons toujours le théorème de la composition des vitesses. Les coordonnées relatives de m sont

(1) $$X = r', \qquad Y = r\theta'.$$

Les composantes de sa vitesse relative sont donc

(2) $$X' = r'', \qquad Y' = r\theta'' + r'\theta'.$$

Quant aux composantes de sa vitesse d'entraînement, on les obtient

en prenant le moment, par rapport à M, du vecteur instantané de rotation, lequel a pour composantes sur les axes OX, OY et sur l'axe perpendiculaire OZ

$$(3) \qquad p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = \omega = \theta'.$$

En appliquant les formules (6) du n° 37, on trouve que les composantes de la vitesse d'entraînement sont

$$(4) \qquad v_{eX} = -\theta' Y = -r\theta'^2, \qquad v_{eY} = \theta' X = \theta' r'.$$

En les ajoutant à (2), on a finalement les composantes de la vitesse absolue de m, c'est-à-dire du vecteur accélération de M :

$$(5) \qquad \gamma_X = r'' - r\theta'^2, \qquad \gamma_Y = r\theta'' + 2r'\theta'.$$

On retrouve les formules (19) du n° 10.

2. *Étudier le mouvement plan qui résulte de la composition d'une translation circulaire uniforme avec une rotation uniforme autour d'un axe perpendiculaire au plan de la translation.*

Les trajectoires sont des courbes cycloïdales et ont été étudiées dans le Chapitre XXXIX du Tome II; nous ne nous en occuperons pas. Nous allons simplement étudier la distribution des vitesses et des accélérations.

Soit C la trace au temps t de l'axe de la rotation et soit O le centre du cercle décrit par ce point, dans la translation. Soient ω la vitesse angulaire de la rotation autour de C et ω' la vitesse angulaire de C autour de O.

Vitesses. — Nous avons à composer une translation de vitesse $\overrightarrow{CW}$ perpendiculaire à OC et égale à $OC \times \omega'$ avec une rotation de vitesse angulaire ω autour de C (*fig.* 9). Nous savons (n° 41) qu'il y a une rotation tangente, dont le centre I est le centre instantané de rotation.

Son vecteur instantané doit être équivalent au système S formé par le vecteur $\overrightarrow{C\Omega}$ perpendiculaire au plan du mouvement et de mesure algébrique ω et par le couple d'axe $\overrightarrow{CW}$. C'est donc un vecteur équipollent à $\overrightarrow{C\Omega}$ et dont l'origine I doit être telle que le moment résultant de S par rapport à ce point soit nul. Autrement dit, on doit avoir

$$(1) \qquad \overrightarrow{CW} + \overrightarrow{C\Omega, I} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{CW}$ est perpendiculaire à CO, I doit se trouver sur CO. Si

l'on mesure les vecteurs de (1) sur la demi-droite déduite de $\overrightarrow{OC}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de O, cette égalité devient

$$\overline{OC} \times \omega' + \overline{CI} \times \omega = 0. \tag{2}$$

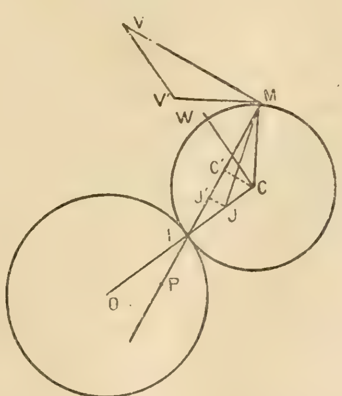
On en déduit

$$\overline{CI} = \overline{CO} \times \frac{\omega'}{\omega}. \tag{3}$$

Cette égalité nous donne la position de I. Connaissant ce point, la vitesse d'un point M quelconque est un vecteur $\overrightarrow{MV}$ perpendiculaire à IM et égal à $IM \times \omega$. $\Big($D'une manière précise, MV est équipollent au vecteur déduit de $\overrightarrow{IM} \times \omega$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de I.$\Big)$

On peut aussi arriver à ce résultat par un raisonnement plus élémentaire. La vitesse relative de M est $\overrightarrow{MV'}$ perpendiculaire à CM et égal

Fig. 9.



à $CM \times \omega$. Sa vitesse d'entraînement est $\overrightarrow{CW}$, que nous menons en V'V. La vitesse absolue est la somme géométrique $\overrightarrow{MV}$ de ces deux vecteurs.

Menons MI perpendiculaire à MV et soit I son point de rencontre avec OC. Les triangles MCI et MV'V sont semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Comme le vecteur $\overrightarrow{MV'}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{MC}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ suivie d'une homothétie dans le rap-

port ω, on déduit le triangle MV′V du triangle MCI par la même opération. On en conclut que $\overrightarrow{CI}$ se déduit de $\overrightarrow{V'V}$ ou de $\overrightarrow{CW}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, suivie d'une homothétie dans le rapport $\frac{1}{\omega}$. Comme $\overrightarrow{CW}$ se déduit de $\overrightarrow{CO}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$, suivie d'une homothétie de rapport ω', on a l'égalité géométrique

$$(4) \qquad \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CO} \times \frac{\omega'}{\omega},$$

qui n'est autre que (3) et qui nous montre que I est fixe, quel que soit le point M considéré.

Si nous revenons maintenant à nos deux triangles, nous en concluons encore que $\overrightarrow{MV}$ se déduit de $\overrightarrow{MI}$ par la rotation de $-\frac{\pi}{2}$, suivie de l'homothétie de rapport ω. Autrement dit, c'est le vecteur vitesse qu'aurait le point M dans une rotation de vitesse angulaire ω autour de I.

Comme OI et CI sont constants, les lieux de I sont un cercle de centre O dans le plan fixe et un cercle de centre C dans le plan mobile. Si l'on se reporte au n° 42, on en conclut que *le mouvement proposé peut être engendré par le roulement du second cercle sur le premier*, conformément à ce que nous avons appris dans le Chapitre XXXIX du Tome II.

Accélérations. — Le mouvement d'entraînement étant une translation, nous avons le droit de composer les accélérations comme les vitesses (n° 16). Les rotations étant, d'autre part, uniformes, les accélérations relative et d'entraînement sont respectivement équipollentes aux vecteurs $\omega^2.\overrightarrow{MC}$ et $\omega'^2.\overrightarrow{CO}$ (n° 38). L'accélération absolue du point M est donc

$$(5) \qquad \overrightarrow{M\gamma} = \omega^2.\overrightarrow{MC} + \omega'^2.\overrightarrow{CO} = \omega^2\left[\overrightarrow{MC} + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\overrightarrow{CO}\right].$$

Considérons le point J défini par

$$(6) \qquad \overrightarrow{CJ} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\overrightarrow{CO}.$$

L'égalité (5) peut s'écrire

$$(7) \qquad \overrightarrow{M\gamma} = \omega^2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CJ}) = \omega^2.\overrightarrow{MJ}.$$

On en conclut qu'à chaque instant *la distribution des accélérations est la même que dans une rotation uniforme, de vitesse angulaire* ω

et de centre J. Ce point J s'appelle *centre des accélérations*. C'est le seul point du plan qui ait une accélération nulle. Tous les points dont le vecteur accélération a une grandeur donnée se trouvent sur un cercle de centre J.

Si l'on compare (6) et (4), on en conclut facilement que J est le pied sur OC de la polaire de O par rapport au cercle roulette.

Cherchons l'accélération normale du point M, dans le *cas particulier où il décrit une épi- ou hypocycloïde*, c'est-à-dire lorsque $CM = CI$. Il faut projeter le vecteur $\omega^2.\overrightarrow{MJ}$ sur la normale MI. Projetons le point J en J'. L'accélération normale est $\omega^2.\overrightarrow{MJ'}$. Or $\overrightarrow{MJ'} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'J'}$. D'autre part, le triangle CIM étant isoscèle, on a $\overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$. Puis, d'après (6) et (4), nous pouvons écrire

$$(8) \qquad \overrightarrow{CJ} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \overrightarrow{CO} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\omega}{\omega'}\overrightarrow{CI} = \frac{\omega'}{\omega}\cdot\overrightarrow{CI}.$$

En projetant sur MI, nous obtenons

$$(9) \qquad \overrightarrow{C'J'} = \frac{\omega'}{\omega}\overrightarrow{C'I} = \frac{\omega'}{2\omega}\overrightarrow{MI}.$$

Donc

$$(10) \qquad \overrightarrow{MJ'} = \frac{\omega' + \omega}{2\omega}\overrightarrow{MI};$$

donc, le vecteur accélération normale est $\frac{\omega(\omega' + \omega)}{2}\overrightarrow{MI}$.

Si P désigne le centre de courbure de la trajectoire, on en déduit

$$\frac{\omega(\omega' + \omega)}{2}\overline{MI} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2.\overline{MI}^2}{\overline{MP}};$$

d'où

$$(11) \qquad \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI}\frac{\omega}{\omega + \omega'} = 2\overrightarrow{MI}.\frac{1}{1 + \frac{\omega'}{\omega}}.$$

Si l'on se rappelle que $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CO}}$, il serait facile de mettre cette formule sous la forme (23) du n° 597 du Tome II.

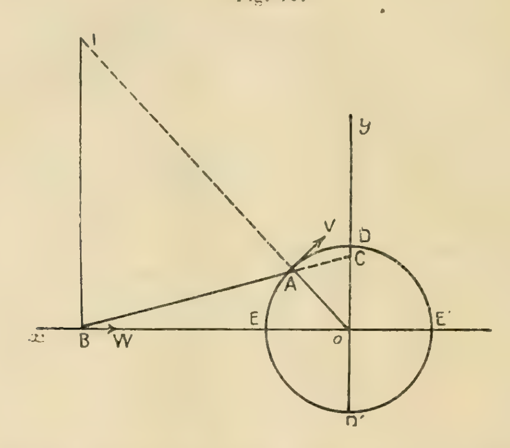
3. *Étudier le mouvement d'une bielle.*

Soit une bielle AB (*fig.* 10), de longueur l, articulée en A à une manivelle OA, de longueur R et, en B, à une tige guidée suivant Ox.

On suppose que la manivelle tourne autour de O avec une vitesse angulaire constante ω et l'on se propose d'étudier le mouvement de la bielle, mais plus particulièrement du point B, qui transmet son mouvement à la tige guidée.

Le centre instantané de rotation I se trouve sur le rayon OA, qui est la normale à la trajectoire de A, et sur la perpendiculaire menée par B à Ox, qui est la normale à la trajectoire de B. Ayant ce point I, nous savons que les vitesses des différents points de la bielle sont les

Fig. 10.



mêmes que si cette dernière tournait autour de I. Or, nous connaissons la vitesse de A, qui est $R\omega$. On peut en déduire, par exemple, *la vitesse angulaire instantanée de la bielle.* Si ω' désigne cette vitesse, la vitesse du point A est $\overline{IA} \times \omega'$; mais elle est aussi $\overline{OA} \times \omega$. En égalant ces deux quantités, nous obtenons

$$(1) \qquad \omega' = \omega \times \frac{\overline{OA}}{\overline{IA}}.$$

On peut transformer cette expression, en prenant le point de rencontre C de BA avec Oy et remarquant que les deux triangles IAB et OAC sont semblables, de sorte que $\frac{\overline{OA}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}$. Portant dans (1), il vient

$$(2) \qquad \omega' = \frac{\omega}{l} \times \overline{CA} = -\frac{\omega}{l}\overline{AC},$$

$\overline{AC}$ étant mesuré sur la droite BA orientée de B vers A.

La vitesse angulaire de la bielle est donc constamment proportion-

nelle à $\overline{AC}$. Elle a le même signe que celle de la manivelle, tant que A décrit la demi-circonférence DE′D′ et le signe contraire quand A décrit D′ED. Elle s'annule quand A passe en D et en D′. Ces derniers résultats étaient d'ailleurs faciles à prévoir.

Cherchons *la vitesse du point* B. Elle est égale à

$$-\overline{IB}\times\omega' = -\overline{IB}\times\omega\times\frac{\overline{OA}}{\overline{IA}}.$$

Mais, d'après la similitude des triangles IAB et OAC, on a

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}};$$

en portant dans l'expression ci-dessus de la vitesse de B, on trouve que cette dernière peut s'écrire

$$(3) \qquad v = -\overline{OC}\times\omega.$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que *la vitesse du point* B *est équipollente à la vitesse qu'aurait le point* C, *s'il était invariablement lié à la manivelle.*

Cette vitesse s'annule quand C vient en O, c'est-à-dire quand A passe en E ou en E′ ou, comme on dit, par les *points morts.*

On peut aussi songer à chercher le maximum de OC, afin d'en déduire le maximum de vitesse de B; mais cette question n'est pas simple et conduit à une équation du troisième degré.

Le mouvement du point B *est un mouvement oscillatoire périodique*, dont la période est la durée d'un tour complet de manivelle, c'est-à-dire $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Cherchons l'équation de ce mouvement, c'est-à-dire l'expression de l'abscisse x de B en fonction du temps ou, ce qui revient au même, en fonction de l'angle polaire $u = \omega t$ de A. Appelons φ l'angle $(\widehat{BA, BO}) = (\widehat{AB, Ox})$. En projetant le contour OAB sur Ox, nous avons

$$(4) \qquad x = R\cos u - l\cos\varphi.$$

Reste à calculer φ en fonction de u. Si nous appliquons la relation des sinus au triangle ABO, nous avons

$$(5) \qquad \frac{\sin\varphi}{R} = \frac{\sin u}{l}.$$

Les formules (4) et (5) résolvent la question.

On peut en déduire, par exemple, la vitesse de B et retrouver la formule (3). Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul facile. Nous allons plutôt chercher à calculer une expression plus simple, mais approchée de x, en nous appuyant sur ce fait que le rapport $e = \frac{R}{l}$ est toujours assez petit et ne dépasse guère, dans la pratique, la valeur $\frac{1}{5}$. L'équation (5) nous donne

$$\sin\varphi = e \sin u;$$

d'où

$$\cos\varphi = (1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}.$$

Développons le second membre par la série du binome, en négligeant les termes en e^4 et de degré supérieur $\left(\text{si } e = \frac{1}{5},\ e^4 = \frac{1}{625}\right)$:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 u = 1 - \frac{e^2}{4}(1 - \cos 2u).$$

Portant dans (4), il vient

$$(6) \qquad x = l\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) + R\left(\cos u + \frac{e}{4}\cos 2u\right).$$

On voit qu'avec cette approximation le mouvement du point B résulte de la superposition de deux mouvements vibratoires simples, de périodes T et $\frac{T}{2}$. Le centre du mouvement a pour abscisse $l\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)$; il est sensiblement à une distance de O égale à la longueur de la bielle. Le second harmonique a une amplitude qui est dans le rapport $\frac{e}{4}$ avec l'amplitude du premier. Ce rapport est, dans la pratique, de l'ordre de $\frac{1}{20}$ et l'on ne commet pas une bien grosse erreur en réduisant le mouvement à son premier harmonique. Cela revient à admettre que le mouvement de la tige est identique au mouvement vibratoire simple que possède la projection de A sur Ox.

Avec la formule (6), la vitesse et l'accélération de B deviennent

$$(7) \qquad v = -R\omega \sin u (1 + e \cos u),$$

$$(8) \quad \gamma = -R\omega^2(\cos u + e\cos 2u) = -R\omega^2[\cos u + e(2\cos^2 u - 1)].$$

Le trinome en $\cos u$ qui se trouve dans le crochet de γ s'annule pour une seule valeur, comprise entre 0 et 1 et dont le développement suivant

les premières puissances de e est

(9) $$\cos u_1 = e(1 - 2e^2).$$

Cette formule donne la position de la manivelle qui correspond au maximum de vitesse de la tige. En portant dans (7), on a la valeur de ce maximum :

(10) $$v_1 = R\omega\left(1 + \frac{e^2}{2}\right).$$

4. *On considère deux disques plans limités par les courbes* C *et* C′, *pouvant tourner respectivement autour des points fixes* O *et* O′ *et assujettis à rester constamment en contact. Calculer le rapport de leurs vitesses angulaires, ainsi que la vitesse de glissement d'un disque sur l'autre.*

Soit M le point de contact des deux courbes C et C′ au temps t. La vitesse de ce point par rapport à C et sa vitesse par rapport à C′ doivent être toutes deux dirigées suivant la tangente commune MT. Si l'on applique le théorème de la composition des vitesses, on en conclut que la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{MG}$, dans le mouvement de C′ par rapport à C, par exemple, doit être aussi dirigée suivant cette tangente, et c'est précisément cette vitesse que l'on appelle la vitesse de glissement de C′ sur C.

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{MG}$, nous devons considérer le mouvement de C′ par rapport à C. Ce mouvement est un mouvement plan, dont nous allons chercher le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\Omega}$. A cet effet, remarquons que si l'on compose le mouvement absolu de C avec le mouvement de C′ par rapport à C, on doit trouver le mouvement absolu de C′. Il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{\omega'}$, d'origine O′, doit être équivalent au système formé par le vecteur $\overrightarrow{\omega}$, d'origine O, et par le vecteur inconnu $\overrightarrow{\Omega}$. Autrement dit, ce vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ doit être la résultante des deux vecteurs $\overrightarrow{\omega'}$ et $-\overrightarrow{\omega}$. Il a donc pour origine le point A de OO′ tel que

(1) $$\frac{\overline{AO}}{\overline{AO'}} = \frac{\omega'}{\omega};$$

en outre, il doit avoir pour mesure algébrique $\omega' - \omega$ sur la perpendiculaire au plan de figure, que nous avons implicitement supposée

orientée dans un sens quelconque. Ceci revient à dire que le mouvement de C′ par rapport à C donne lieu à la même distribution des vitesses qu'une rotation, de vitesse angulaire $\omega' - \omega$, s'effectuant autour du point A, déterminé par (1).

Cela étant, pour que la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{MG}$ de M soit dirigée suivant MT, il faut et il suffit que A se trouve sur la normale commune MN. Nous arrivons donc à la règle suivante :

Le rapport des vitesses angulaires est donné, à chaque instant, par la formule (1), *où* A *désigne le point de rencontre de la ligne des centres* OO′ *avec la normale commune* MN *aux deux disques.*

Quant à *la vitesse de glissement* G, elle est due à la rotation autour de A; elle est donc donnée par la formule

$$G = AM.(\omega' - \omega). \tag{2}$$

Il est bien entendu que, dans tout ceci, *les vitesses angulaires* ω *et* ω' *sont algébriques.* Elles sont de même signe, c'est-à-dire que les deux disques tournent dans le même sens, si la normale MN passe à l'extérieur du segment OO′. Les deux disques tournent, au contraire, dans des sens opposés, si MN passe entre O et O′. Dans ce dernier cas, les vitesses angulaires s'ajoutent en valeur absolue, dans l'expression (2) de la vitesse de glissement.

Pour que le rapport des vitesses angulaires reste constant, il faut et il suffit que A reste fixe sur OO′. Par rapport aux plans des deux disques, il décrit alors des circonférences, de centres respectifs O et O′. Dans le mouvement de C′ par rapport à C, la deuxième circonférence roule sur la première. Autrement dit, les mouvements des deux disques sont ceux que réalisent deux roues dentées, de centres O et O′, engrenant l'une avec l'autre et dont les circonférences primitives sont tangentes en A. Les courbes C et C′ constituent deux profils conjugués (n° 43), pouvant servir de profils aux dents de l'engrenage.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un corps solide tourne autour d'un axe de cosinus directeurs (a, b, c) avec la vitesse angulaire ω. Calculer les composantes, suivant les axes de coordonnées, du vecteur vitesse du point $M(x, y, z)$. [Appliquer les formules (6) du n° 37.]

2. Étudier la composition des accélérations, dans le cas où le mouve-

ment d'entraînement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe. [Prendre l'axe de la rotation pour axe des z du trièdre mobile $Oxyz$. Si (x, y, z) sont les coordonnées relatives du point M, les coordonnées du point m qui décrit l'hodographe sont

$$X = x' - \omega y, \qquad Y = y' + \omega x, \qquad Z = z'.$$

Calculer les composantes de sa vitesse suivant les axes mobiles, en lui appliquant les mêmes formules, déduites du théorème de la composition des vitesses et du théorème du n° 37. On trouve, en interprétant les formules ainsi obtenues, que l'accélération complémentaire (n° 16) est le double du vecteur vitesse d'entraînement que posséderait le point $P(x', y', z')$, extrémité du vecteur équipollent à la vitesse relative de M, mené par O.]

3. Un volant tourne à la vitesse de 150 tours par minute. Calculer l'accélération, en unités C. G. S., d'un point situé à 3^m de l'axe. Comparer cette accélération avec l'accélération de la pesanteur.

4. Une turbine centripète est constituée par une série d'aubes telles que AA' (*fig.* 11), faisant les angles a et a' avec les circonférences extérieure C et intérieure C'. L'eau qui traverse cette turbine est amenée en A par un distributeur, dont l'aube DA fait l'angle b avec C. Soit v la vitesse d'arrivée de l'eau. Soient R et R' les rayons de C et de C' et ω la vitesse angulaire de la turbine. Quelle doit être cette vitesse pour que l'eau pénètre dans la turbine sans choc contre les aubes? (Cela veut dire que la vitesse de l'eau par rapport à la turbine doit être dirigée tangen-

Fig. 11.

tiellement à l'aube AA'.) On suppose que la vitesse radiale de sortie est dans un rapport connu k avec la vitesse radiale d'entrée. Calculer quel doit être l'angle a' pour que l'écoulement de l'eau à la sortie se fasse radialement, c'est-à-dire suivant le rayon A'O. Examiner le cas particulier où a est un angle droit.

Application numérique :

$$b = 20^\circ, \qquad a = 90^\circ, \qquad v = 8^{\text{m}},50 : \text{sec.}$$
$$R = 2R' = 0^{\text{m}},60, \qquad k = 2.$$

Calculer la vitesse de la turbine en nombre de tours par minute. (On trouve environ 127 tours par minute et un angle de sortie égal à $55^\circ\frac{1}{2}$.)

5. Une droite OX tourne d'un mouvement uniforme autour du point fixe O. Un point M décrit en même temps cette droite d'un mouvement uniforme. Étudier le mouvement absolu de ce point. Chercher la trajectoire, le vecteur vitesse, l'hodographe, le vecteur accélération. (L'hodographe peut se déduire d'une développante de cercle en prenant le symétrique de chaque point par rapport au centre de courbure. Le vecteur accélération peut être obtenu au moyen de l'hodographe ou bien au moyen de l'Exercice n° 2.)

6. Quel est le lieu des points qui ont une vitesse ou une accélération de grandeur donnée dans un mouvement hélicoïdal?

7. Reprendre l'Exercice résolu n° 2, en remplaçant la translation circulaire par une translation rectiligne et uniforme. Quels sont les hodographes des différents points du plan? (Cercles concentriques.)

8. Un point M est animé d'un mouvement hélicoïdal d'axe A. Étudier le mouvement de sa projection oblique sur un plan perpendiculaire à A. (Se ramène au mouvement de l'exercice précédent.)

9. L'hélice d'un navire fait 110 tours par minute. Son pas est de $5^{\text{m}},50$. Le recul est de 10 pour 100 (c'est-à-dire que l'avancement du navire est inférieur de 10 pour 100 à ce qu'il serait si l'hélice pouvait être assimilée à une vis de même pas se vissant dans son écrou). Calculer la vitesse du navire en kilomètres à l'heure et en nœuds. (Le nœud est la vitesse de 1 mille marin par heure; le mille marin vaut 1855^{m}.)

10. Une roue dentée de 12^{cm} de rayon et de 52 dents engrène avec une vis sans fin. Quel doit être le pas de cette vis et quel est le rapport des vitesses angulaires de la roue et de la vis?

10 *bis*. Une vis V porte deux filetages de pas k et k'. Le premier filetage est engagé dans un écrou fixe E et le deuxième dans un écrou E', qui peut glisser le long de l'axe, mais ne peut pas tourner. De combien avance E' par tour de vis? ($k - k'$. En prenant des pas très voisins, on peut obtenir un mouvement très lent.)

11. Un corps solide est animé d'un mouvement hélicoïdal. (D'après le n° 45, on pourrait supposer un mouvement quelconque.) On considère, à l'instant t, un point M de ce corps solide et son vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$.

1° Lieux de V et de la droite MV quand M décrit une droite donnée D (*Cf.* t. II, Exercice résolu n° 4 du Chapitre VIII.)

2° Lieu de M tel que la droite MV passe par un point donné. (*Cf.* t. II, Exercice proposé n° 33 du Chapitre VIII.)

12. Démontrer les propriétés suivantes du mouvement hélicoïdal (ou, d'après le n° 45, du mouvement le plus général) d'un corps solide.

1° Les vitesses des différents points d'une droite D ont même projection sur cette droite. Cas où cette projection est nulle;

2° Les plans normaux aux trajectoires des différents points de D passent par une même droite D'. Cas où les droites D et D' sont confondues;

3° Dans tout plan P entraîné par le corps solide, il y a un point M dont la vitesse est perpendiculaire à P.

(Ces propriétés sont la traduction cinématique de propriétés connues de la théorie des vecteurs. *Cf.* t. II, n°s 115, 126, 125.)

13. Une sphère S est animée d'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe passant par son centre. Trouver, sur elle, une courbe qui soit orthogonale aux trajectoires de tous ses points. (Les tangentes à cette courbe doivent appartenir à un complexe linéaire. *Cf.* t. II, Chap. XIV, Exercice résolu n° 4.)

14. Reprendre l'Exercice n° 5, en supposant que la droite OX tourne autour d'un axe Oz, qui ne lui est pas perpendiculaire.

15. On reprend l'exercice précédent et l'on demande de déterminer le mouvement de OX pour que la vitesse absolue de M soit constante.

16. Démontrer le théorème de Savary (t. II, Chap. XXXIX, Exercice résolu n° 1) par la composition des rotations. [Soient C la courbe

base, C' la courbe roulette, I leur point de contact, Ix la tangente et Iy la normale. Soient maintenant A et A' les deux profils conjugués, liés invariablement le premier à C, le second à C'. Soit M leur point de contact, MX la tangente et MY la normale. Soient enfin O, O', P, P' les centres de courbure de C, C', A, A'. Il faut prouver que les droites OP et O'P' se coupent en un point N, situé sur la perpendiculaire IN à IM. A cet effet, on considère le mouvement de XMY par rapport à xIy comme pouvant être obtenu indifféremment par l'une ou l'autre des compositions représentées par les égalités symboliques (n° 13) :

$$(\text{XMY}, xIy) = (\text{XMY}, \text{A}) + (\text{C}, xIy),$$
$$(\text{XMY}, xIy) = (\text{XMY}, \text{A}') + (\text{C}', xIy).$$

On en déduit, par la composition des vecteurs instantanés de rotation (n° 46), que le point N doit être le centre instantané de rotation du mouvement des premiers membres. Mais, on sait que MY passe par I (n° 42); on en conclut (n° 42, théorème II) que N se trouve sur la perpendiculaire à cette droite menée par I.]

17. On donne, dans un même plan, deux manivelles OA et O'A', qui peuvent tourner respectivement autour de O et de O'. Elles sont reliées par une bielle AA'. Démontrer que le rapport de leurs vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{\text{BO}}}{\overline{\text{BO}'}}$, B désignant le point de rencontre de OO' avec la bielle. En déduire les points morts de O'A' (c'est-à-dire les positions de vitesse nulle), dans l'hypothèse où l'on a les inégalités suivantes :

$$\text{OA} < \text{O}'\text{A}', \qquad \text{AA}' < \text{OO}', \qquad \text{O}'\text{A}' - \text{OA} > \text{OO}' - \text{AA}'.$$

(Pour trouver le rapport des vitesses angulaires, on peut se servir des vitesses des points A et A', comme dans l'Exercice résolu n° 3; on appliquera, en outre, le théorème de Ménélaüs au triangle IOO' coupé par la transversale ABA'. On peut aussi considérer le mouvement de O'A' par rapport à OA et chercher son centre instantané, en prenant comme système de référence intermédiaire d'abord AA', puis OO'. On trouve ainsi que ce centre doit être sur AA' et qu'il doit diviser OO' dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.)

18. On reprend l'Exercice résolu n° 2. Quel est, à l'instant t, le lieu des points M qui sont point d'inflexion sur leur trajectoire? (Cercle de diamètre IJ.)

19. Une tige OO′ tourne autour de O avec une vitesse angulaire ω. Une autre tige O′M tourne autour de O′, avec la vitesse angulaire $n\omega$, par rapport à OO′. Étudier le mouvement absolu de cette seconde tige, en utilisant la composition des rotations (n° 46). Cas particuliers $n = -1$ et $n = -2$. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

20. Un *train d'engrenages* est constitué de la manière suivante : On a n axes parallèles, dont chacun porte deux roues dentées de rayons différents, la plus petite étant appelée *pignon*. Chaque pignon engrène avec la grande roue de l'axe précédent. Calculer le rapport entre les vitesses angulaires du dernier et du premier axe. (Ce rapport s'appelle la *raison* du train.)

21. Deux roues dentées C et C′, de rayons R et R′, sont montées *folles* sur le même axe O. Un satellite S, de diamètre R′ — R, engrène extérieurement avec C et intérieurement avec C′. Calculer la relation qui existe entre les vitesses angulaires ω et ω' de C et de C′ et la vitesse angulaire a de la pièce porte-satellite (qui peut tourner librement autour de O). Que se passe-t-il quand on fixe l'une des roues ou bien le porte-satellite, ou quand on rend solidaires deux quelconques de ces trois pièces? (Considérer les mouvements par rapport au porte-satellite et écrire que les vitesses des deux points de contact de S avec C et C′ sont des vecteurs opposés. On trouve

$$a = \frac{R\omega - R'\omega'}{R - R'}.$$

Ce dispositif est fréquemment employé dans l'industrie, entre autres dans certains changements de vitesse de bicyclette.)

22. Une roue dentée C, de rayon R, peut tourner autour de son centre O avec une vitesse angulaire a. Un satellite C′, de rayon $R' = mR$, roule extérieurement sur C. Soit A son centre et soit b la vitesse angulaire de OA. Une manivelle AB est solidaire de C′. Elle est articulée en B avec une bielle BD, de longueur égale à OA, laquelle est articulée en D avec une autre manivelle OD, égale et parallèle à AB, mobile autour de O et de vitesse angulaire c. Trouver la relation qui existe entre les trois vitesses angulaires a, b, c. Que devient cette relation quand on fixe l'une des trois pièces C, OA, OD?

[La vitesse angulaire de OD est la même que celle de S. On ramène le cas général à celui où OA est fixe et l'on trouve

$$a - b + m(c - b) = 0.]$$

23. Reprendre l'exercice précédent, en intercalant entre C et C′ un satellite auxiliaire C″. (C″ a pour unique effet de renverser le sens de rotation de C′ par rapport à OA; ce qui revient à changer le signe de m dans la formule précédente. Dans le cas où la roue C est fixe, on a

$$\frac{c}{b} = 1 - \frac{1}{m}.$$

On peut faire tourner OD dans un sens ou dans l'autre, suivant que R′ est plus petit ou plus grand que R. Si les deux roues sont égales, OD reste immobile. Si les deux roues ont des rayons très voisins, on peut obtenir une rotation très lente de OD, c'est-à-dire une très grande démultiplication entre les vitesses de OA et de OD.)

24. Deux roues dentées égales A et A′ sont montées folles sur le même axe. Une pièce M tourne autour de cet axe avec la vitesse angulaire ω. Elle porte les axes de deux satellites S et S′ également fous et engrenant extérieurement entre eux, S engrenant en outre extérieurement avec A, et S′ avec A′. Démontrer que la somme des vitesses angulaires des deux roues est égale à 2ω. (Se ramener, par la composition des vitesses angulaires, au cas où M est fixe; les deux roues tournent alors avec la même vitesse, en sens contraire. Ce dispositif porte le nom de *différentiel*.)

25. Soient deux courbes planes C et C′, qui roulent l'une sur l'autre et soit I_0 leur point de contact initial. On prend une troisième courbe plane B quelconque et on la fait rouler successivement sur C et C′, en faisant coïncider, dans les deux cas, le même point de B avec I_0. Un point P invariablement lié à B décrit, de la sorte, une courbe A dans le plan de C et une courbe A′ dans le plan de C′. Démontrer que ces deux courbes sont deux profils conjugués (n° 43). (Si l'on fait rouler simultanément C′ sur C et B sur C′, B roule aussi sur C. Si I désigne le point de contact commun au temps t, la droite IP est, à cet instant, normale en P à A et à A′; donc ces deux courbes sont tangentes. Cet artifice est employé, dans le tracé des engrenages, sous le nom de *méthode des épicycloïdes*.)

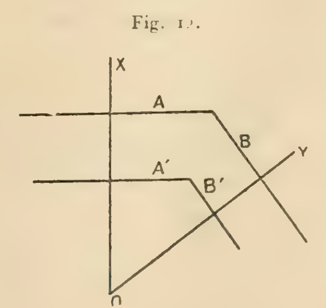
26. Appliquer la méthode précédente, en supposant que C, C′ et B sont des cercles. Cas où B est deux fois plus petit que C′ et roule intérieurement sur lui (A′ est un diamètre de C′; on obtient un *engrenage à flancs rectilignes*). Cas où B se confond avec C′ (A′ se réduit à un point; on obtient l'*engrenage à lanterne*).

27. Soient deux circonférences C et C', qui tournent autour de leurs centres respectifs O et O', supposés fixes, en roulant l'une sur l'autre. Par leur point de contact I, menons une droite fixe ID et soient B et B' les circonférences tangentes à cette droite et de centres respectifs O et O'. On suppose que B est solidaire de C et B' de C'. On imagine, en outre, que la droite D glisse sur elle-même, de manière à rouler sans glissement sur B'. Montrer qu'elle roule, en même temps sur B. (Cela revient à montrer que les vitesses d'entraînement des points de contact M et M' de B et B' avec D sont égales, ce qui est évident, car elles sont dans un même rapport avec la vitesse de I.) En déduire que les développantes des deux cercles B et B' qui sont issues d'un même point P de D constituent deux profils conjugués. (*Engrenages à développantes de cercle.*)

28. Deux cônes de révolution de même sommet O tournent autour de leurs axes respectifs supposés fixes, en roulant sans glissement l'un sur l'autre. Calculer le rapport de leurs vitesses angulaires. (Rapport inverse des sinus des demi-angles au sommet. On peut écrire que la vitesse d'un point de la génératrice de contact est la même sur les deux cônes. On peut aussi remarquer que la différence géométrique des deux vecteurs instantanés de rotation doit être dirigée suivant la génératrice de contact. Cette liaison est réalisée matériellemeut par les *engrenages coniques*. Les cônes précédents sont alors appelés les *cônes primitifs.*)

29. Deux roues dentées coniques A, de rayon a et A', de rayon a', sont montées folles sur le même axe OX. Leurs cônes primitifs ont pour sommet commun O. Deux autres roues B, de rayon b et B', de rayon b',

Fig. 12.



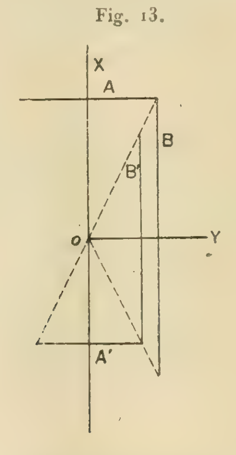
sont montées folles sur l'axe OY, mais sont solidaires l'une de l'autre. Leurs cônes primitifs ont encore pour sommet O. En outre, B engrène avec A et B' avec A'. On fait tourner OY autour de OX avec une vitesse

angulaire β. Soient α et α' les vitesses de A et de A'. Chercher la relation qui existe entre ces trois vitesses. (Se ramener au cas où OY est immobile. On trouve

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha' - \beta} = \frac{b}{b'} \times \frac{a'}{a}.)$$

30. Que devient la formule de l'exercice précédent quand les roues A et A' sont de part et d'autre de O? (Changer le signe du rapport.) Cas où elles ont, en outre, même cône primitif. (On a $\alpha + \alpha' = 2\beta$. C'est le

Fig. 13.



principe du *différentiel d'automobile.* Les roues A et A' sont solidaires des deux roues motrices et la vitesse β est proportionnelle à celle du moteur.)

CHAPITRE V.

DYNAMIQUE DU POINT.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soient deux points fixes* A *et* A′. *Un point* M *est attiré par chacun d'eux suivant une force égale à l'inverse du carré de la distance.*

1° *Construire les lignes de niveau et les lignes de force ;*

2° *Le point* M *étant lancé à partir d'un point quelconque de* AA′, *avec une vitesse dirigée suivant cette droite, étudier le mouvement qu'il va prendre sous l'action des deux forces précédentes. Construire les diagrammes des espaces et des vitesses, dans le cas particulier suivant :* AA′ = 40 ; M_0 *est à la distance* 40 *du milieu de* AA′ ; *la vitesse initiale est nulle ; la masse du point* M *est égale à* 2.

1° La fonction des forces est (n° 62)

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}, \tag{1}$$

r et r' désignant les distances MA et MA′.

Les surfaces de niveau sont évidemment de révolution autour de AA′ et il suffit de construire leurs méridiennes, c'est-à-dire les lignes de niveau dans un plan quelconque passant par AA′. Si l'on prend les points A et A′ pour pôles, ces lignes ont pour équation générale, en coordonnées bipolaires, l'équation (1), où U doit être regardé comme une constante.

Soit à construire la ligne $U = \frac{2}{\lambda}$, λ étant une longueur donnée. Appelons $2a$ la distance AA′. Quitte à faire une symétrie par rapport à la perpendiculaire Oy au milieu de AA′, nous pouvons supposer, par exemple,

$$r > r'. \tag{2}$$

Il faut, en outre, pour que l'on puisse construire le triangle MAA', que l'on ait

$$(3)\qquad r + r' \geqq 2a, \qquad r - r' \leqq 2a.$$

Cela posé, nous calculons r' en fonction de r, au moyen de l'équation (1), et nous faisons varier r dans des limites telles que l'on ait constamment les inégalités (2) et (3), r' devant, en outre, être positif.

Si l'on porte la valeur r' donnée par

$$(4)\qquad \frac{1}{r'} = \frac{2}{A} - \frac{1}{r}$$

dans (2), on trouve que l'on doit avoir

$$(5)\qquad r \geqq A.$$

D'ailleurs, si $r = A$, on a aussi $r' = A$ et la première inégalité (3) exige que $A > a$.

Si l'on porte (4) dans (3), on obtient les deux inégalités

$$(6)\qquad r^2 - 2ar + aA \geqq 0,$$

$$(7)\qquad r^2 - (A + 2a)r + aA \leqq 0.$$

Le premier trinome en r n'a ses racines réelles que si $A < a$. Le second a, au contraire, ses racines toujours réelles. De toute façon, nous sommes conduits à distinguer deux cas :

Premier cas : $A > a$. — L'inégalité (6) est vérifiée identiquement. Pour que (7) le soit, il faut que r soit compris entre les racines. Comme on doit, en outre, avoir (5) et que A est compris entre les racines de (7), on doit avoir, en définitive,

$$(8)\qquad A \leqq r \leqq a + \frac{A}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{A^2}{4}}.$$

Si r parcourt cet intervalle en croissant, le point M part d'une certaine position sur Oy, pour aboutir à une certaine position sur Ox, à gauche de A'. La courbe est une courbe fermée, entourant A et A'.

Deuxième cas : $A < a$. — A est compris entre les racines de (6); donc, r doit être supérieur à la plus grande racine de ce trinome. Comme A ne cesse pas d'être compris entre les racines de (7), r est, de ce fait, supérieur à la plus petite de ces racines; il doit, en outre, être

inférieur à la plus grande. On doit donc avoir, en définitive,

$$(9)\qquad a+\sqrt{a^2-aA}\leqq r\leqq a+\frac{A}{2}+\sqrt{a^2+\frac{A^2}{4}}.$$

Si r parcourt cet intervalle en croissant, M part d'un point de Ox situé entre O et A', et revient sur Ox, à gauche de A'. En complétant par symétrie, on voit que la courbe se compose de deux courbes fermées entourant respectivement A' et A et ne rencontrant pas Oy.

Dans le *cas intermédiaire* où $A=a$, la courbe admet l'origine pour point double ; elle ressemble à une lemniscate de Bernoulli.

La tangente en un point M quelconque d'une ligne de niveau s'obtient en construisant la résultante des deux attractions ; la tangente cherchée est perpendiculaire à cette résultante (n° 61). Cette construction est toutefois en défaut lorsque M vient en O (cas $A=a$), car la résultante des attractions est nulle, et l'on ne sait plus quelle est sa direction. Nous savons d'ailleurs que O est alors un point double. Pour avoir les tangentes en ce point, on peut procéder comme il suit.

Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes infiniment petites d'un point de la courbe voisin de O. Calculons la partie principale de U. En écrivant

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

développant par la série du binome et remarquant que $\frac{1}{r'}$ s'en déduit en changeant x en $-x$, on obtient

$$U=\frac{2}{a}+\frac{2x^2-y^2}{a^3}+\ldots.$$

Si $U=\frac{2}{a}$, les termes de moindre degré de l'équation sont $\frac{2x^2-y^2}{a^3}$ et les tangentes à l'origine ont pour équation

$$(10)\qquad y=\pm x\sqrt{2}.$$

Sur la figure 14, on a construit les courbes

$$100\,U=4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 18,$$

en prenant $a=20^{mm}$. A cet effet, on a calculé, à la règle, les valeurs de r' correspondant à des valeurs de r échelonnées de 5 en 5 et assujetties

aux conditions (8) ou (9). Les résultats sont consignés dans le Tableau ci-dessous :

$100\,U = 4.$

r.....	77	75	70	65	60	55	50
r'....	37	37,5	39	40,6	42,9	45,9	50

$100\,U = 6.$

r.....	62,7	60	55	50	45	40	35	33,3
r'....	22,7	23	23,8	25	26,4	28,6	31,8	33,3

$100\,U = 8.$

r.....	56,1	55	50	45	40	35	30	25
r'....	16,1	16,2	16,7	17,3	18,2	19,5	21,4	25

$100\,U = 10.$

r.....	52,4	50	45	40	35	30	25	20
r'....	12,4	12,5	12,9	13,3	14	15	16,7	20

$100\,U = 12.$

r.....	50	45	40	35	30	28,2
r'....	10	10,2	10,5	10,9	11,5	11,8

$100\,U = 14.$

r.....	48,4	45	40	35	30,7
r'....	8,4	8,5	8,7	9	9,3

$100\,U = 16.$

r.....	47,2	45	40	35	32,2
r'....	7,2	7,3	7,4	7,6	7,8

$100\,U = 18.$

r.....	46,3	45	40	35	33,3
r'....	6,3	6,3	6,5	6,6	6,7

Par des intersections de circonférences, on a construit les points correspondant à ces couples de valeurs de r et de r' et l'on a joint les points correspondant à une même valeur de U.

On peut remarquer que r' varie très peu pour les grandes valeurs de U, de sorte que les lignes correspondantes sont sensiblement des cercles de centre A' ou A.

Lignes de force. — Nous allons chercher leur équation différentielle en coordonnées bipolaires. A cet effet, résolvons d'abord le problème général suivant :

Soient deux fonctions de forces U et V, *données en fonction de* r

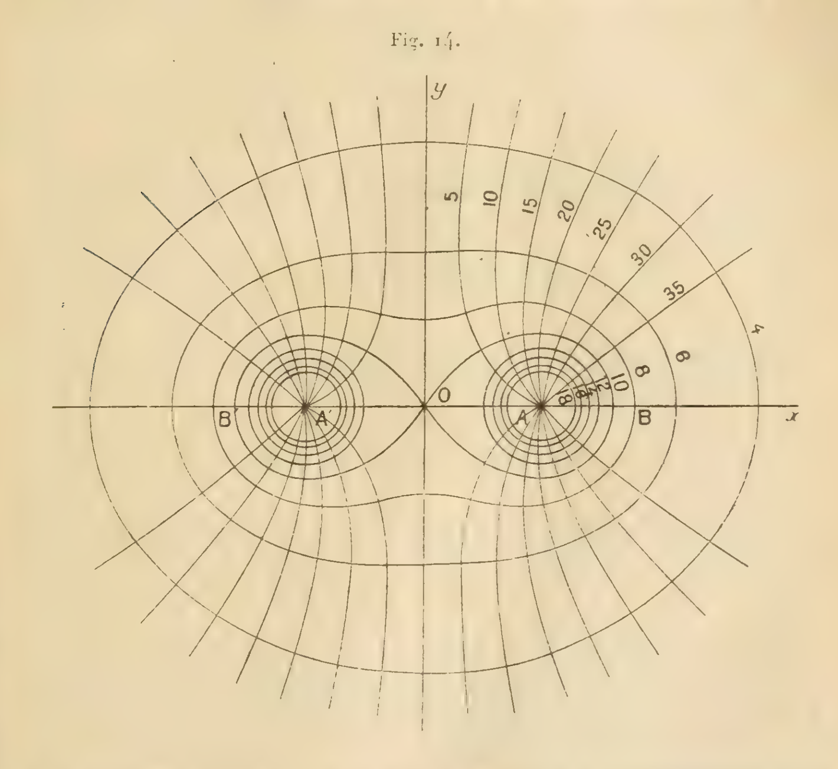
et de r'. Quelle relation doit-il exister entre elles pour que les lignes de niveau correspondantes soient orthogonales?

Les composantes de la première force suivant MA et MA′ sont

$$a = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad a' = \frac{\partial U}{\partial r'}, \tag{11}$$

comme on le voit en identifiant le travail élémentaire avec la différentielle dU. On a des expressions analogues pour les composantes b et b'

Fig. 14.



de la deuxième force. Ces deux forces doivent être perpendiculaires, ce que nous exprimerons facilement en écrivant que leur produit scalaire est nul (t. II, n° 104) :

$$(\vec a - \vec{a'}).(\vec b - \vec{b'}) = 0.$$

ou

$$\vec a.\vec b + \vec{a'}.\vec{b'} + \vec a.\vec{b'} - \vec b.\vec{a'} = 0,$$

ou

$$ab + a'b' + (ab' + ba')\cos M = 0.$$

En tenant compte de (11) et remarquant que

$$\cos M = \frac{r^2 + r'^2 - 4a^2}{2rr'},$$

la condition cherchée s'écrit finalement

$$(12) \qquad 2rr'\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r'}\cdot\frac{\partial V}{\partial r'}\right) + (r^2 + r'^2 - 4a^2)\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r'} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r'}\right) = 0.$$

Prenons maintenant pour U la fonction (1). Le long de $V = \text{const.}$, on doit avoir

$$(13) \qquad \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial r'}dr' = 0.$$

En éliminant les variables homogènes $\frac{\partial V}{\partial r}$ et $\frac{\partial V}{\partial r'}$ entre (12) et (13), on obtient l'équation différentielle cherchée :

$$(14) \quad 2rr'(r'^2dr' - r^2dr) + (r^2 + r'^2 - 4a^2)(r^2dr' - r'^2dr) = 0.$$

Cette équation s'intègre en faisant le changement de variables

$$(15) \qquad r + r' = u, \qquad r - r' = v.$$

On aboutit à une équation de Riccati, si l'on regarde u^2 comme la fonction inconnue. On aperçoit, d'autre part, la solution particulière $u^2 = a^2$; on peut donc intégrer par quadratures (t. I, n° 323). Nous laissons au lecteur le soin de développer tous ces calculs et nous indiquons seulement le résultat :

$$(16) \qquad u^2 = \frac{v(Av - 4a^2)}{A - v},$$

A désignant la constante d'intégration.

En écrivant les équations cartésiennes des deux cercles de rayons r et r' et de centres A et A', on calcule aisément x et y^2 en fonction de u

et de v. En tenant compte de (16), on trouve ensuite

$$(17)\qquad x^2 = \frac{v^3(Av - 4a^2)}{16a^2(A - v)}, \qquad y^2 = \frac{A(v^2 - 4a^2)^2}{16a^2(v - A)}.$$

On a donc les *équations paramétriques des lignes de force.*

Nous allons construire ces lignes pour des valeurs échelonnées de A. Cette constante ne peut être négative, si nous continuons à supposer $r > r'$, c'est-à-dire $v > 0$, sans quoi y^2 serait négatif. A étant supposé positif, la réalité de y exige $v > A$; puis, celle de x exige $v < \frac{4a^2}{A}$. Ces deux inégalités ne sont compatibles que si $A < 2a$.

Pour que r' soit positif, il faut $u > v$; en tenant compte de (16), cela donne $v < 2a$, limite qui est inférieure à $\frac{4a^2}{A}$.

En définitive, nous devons seulement faire varier v de A à $2a$ [1].

Lorsque v tend vers A, x et y deviennent infinis, le point M s'éloigne indéfiniment, en se rapprochant de l'hyperbole qui a pour foyers A et A' et pour longueur de son axe réel A. Cette hyperbole est donc asymptote à la courbe.

Lorsque $v = 2a$, $y = 0$ et $x = \pm a$. Chaque ligne de force passe donc par A et A'. L'angle V que fait la tangente en A avec Ox est donné par la formule

$$(18)\qquad \cos\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{A}{2a}}.$$

On peut établir ce résultat en remarquant que V est la limite de l'angle M dont le cosinus a été calculé plus haut. On peut aussi le déduire du coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente.

En calculant la dérivée de y^2 par rapport à v, on constate que cette dérivée reste négative lorsque v croît de A à $2a$; donc y décroît constamment. En opérant de même pour x, on constate que x^2 décroît constamment si $A > a$, et passe par un minimum si $A < a$.

En supposant toujours $a = 20$, nous avons construit les lignes de forces $A = 5, 10, \ldots, 35$. Pour chacune, nous avons calculé les coefficients

---

[1] Si v variait de $2a$ à $\frac{4a^2}{A}$, le point M décrirait une ligne de force correspondant au cas où A' serait répulsif, car, r' devenant négatif, la fonction des forces serait, en réalité, en rétablissant le signe de r', $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$.

angulaires $= m$ des asymptotes et l'angle V de la tangente en A avec Ox. Nous avons ensuite calculé x et y pour des valeurs convenablement échelonnées de v. Les résultats sont consignés dans le Tableau ci-dessous, et les courbes sont tracées sur la figure 14.

A = 5. $m = 7,94$. V = 138°.					
v.....	6	8	10	15	20
x.....	7,3	6,5	7	9	11,2
y.....	43,8	24,8	18,8	12,2	8,6

A = 10. $m = 3,87$, V = 120°.						
v......	11	13	15	20	25	30
x......	17,6	13	12,4	13,3	14,8	16,5
y......	58,6	32,8	24,2	15	10	6,2

A = 15, $m = 2,47$. V = 104°,4.					
v...	16	18	20	25	30
x...	29,5	20,1	18	17,3	18
y...	65,1	35,7	26	15	8,7

A = 20, $m = \sqrt{3}$. V = 90°.					
v...	21	23	25	30	35
x...	41,1	27	23	20,5	20,1
y...	66,5	34,6	24,4	12,3	5,5

A = 25, $m = 1,25$, V = 75°,4.				
v..........	26	28	30	35
x..........	51	32	26,8	22
y..........	59	29,5	19,5	7,4

	A = 30, $m = 0,88$, V = 60°.			A = 35, $m = 0,55$, V = 41°.
v.......	31	33	35	37
x.......	56	33,8	28,5	34,4
y.......	43,8	20,2	12,4	12,1

2° Les conditions initiales et la loi de force étant symétriques par rapport à Ox, le mouvement a lieu suivant cette droite. Il est déterminé par l'intégrale des forces vives, que nous écrivons

$$\frac{1}{2} m v^2 = U - h, \tag{19}$$

la constante h étant donnée par

$$h = U_0 - \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{20}$$

Pour se rendre compte aisément des différentes circonstances du mou-

vement, il est commode de construire la courbe qui donne U en fonction de x (*fig.* 15).

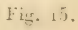
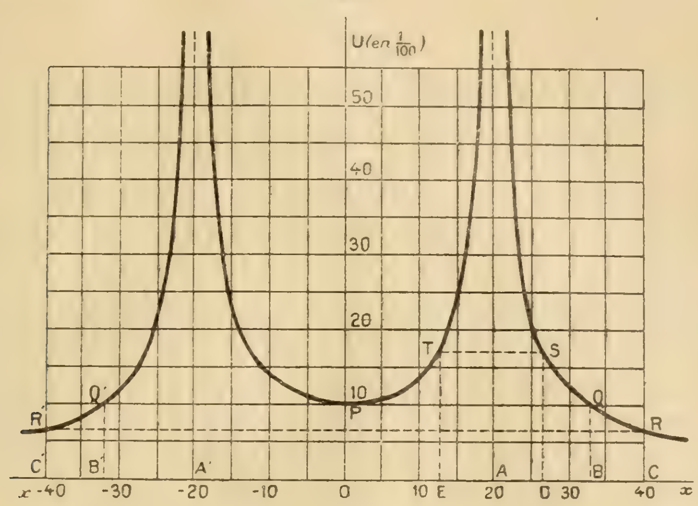


Fig. 15.



Pour que v soit réel, il faut que $U > h$.

Premier cas : $h < 0$, c'est-à-dire $v_0^2 > \frac{2U_0}{m}$. — Quel que soit x, $U - h$ reste positif, la vitesse ne s'annule jamais. Il en résulte que le point M *se déplace constamment dans le même sens et s'éloigne indéfiniment*, avec une vitesse qui tend vers $\sqrt{-\frac{2h}{m}}$, ce qui signifie que le mouvement tend *vers un mouvement uniforme.*

Deuxième cas : $0 < h < \frac{2}{a}$, c'est-à-dire $\frac{2}{m}\left(U_0 - \frac{2}{a}\right) < v_0^2 < \frac{2U_0}{m}$. — La droite $U = h$ rencontre la courbe (U) en deux points R et R', projetés sur Ox en deux points C et C', de milieu O. Chaque fois que M passe par un de ces points, la vitesse s'annule. M ne peut d'ailleurs sortir du segment CC', sans quoi U deviendrait plus petit que h et la vitesse deviendrait imaginaire. En particulier, ceci nous prouve que la position initiale M_0 se trouve nécessairement entre C et C'. Si nous supposons, pour fixer les idées, que la vitesse initiale est dirigée dans le sens positif de Ox, le mobile se dirige d'abord vers C; il atteint ce point au bout

d'un temps qui est donné par l'intégrale

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(U-h)}}, \tag{21}$$

x_1 désignant l'abscisse du point C. La fonction sous le signe $\int$ devient infinie à l'extrémité de l'intervalle d'intégration; mais son ordre d'infinitude est $\frac{1}{2}$, car la figure 15 montre que x_1 est racine simple de $U-h$. On en conclut que l'intégrale a une valeur finie (t. I, n° 154). Le point C est donc atteint au bout d'un temps fini. Le point M revient ensuite en sens inverse et repasse aux mêmes points que précédemment, avec des vitesses opposées et à des époques symétriques par rapport à l'époque t_1. Il atteint C′ au bout d'un temps fini, pour la même raison que précédemment. Puis, il repart dans le sens positif, revient en C et ainsi de suite. En définitive, le mouvement est une *oscillation périodique entre les positions extrêmes* C *et* C′. Elle admet d'ailleurs le point O pour centre de symétrie, par suite de la symétrie de la courbe (U) par rapport à l'axe OU. Sa période est 4T, T étant donné par l'intégrale

$$T = \int_{0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(U-h)}}. \tag{22}$$

Troisième cas : $h > \frac{2}{a}$, c'est-à-dire $v_0^2 < \frac{2}{m}\left(U_0 - \frac{2}{a}\right)$. — La droite $U = h$ rencontre la courbe (U) en deux points tels que S et T. En raisonnant comme précédemment, on voit que le mouvement est une *oscillation périodique entre les points* D *et* E, projections de S et T. Mais, cette fois, il n'y a plus de centre de symétrie. Si x_1 et x_2 sont les abscisses de T et de S, la période est 2T, avec

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(U-h)}}. \tag{23}$$

Cas intermédiaire : $h = \frac{2}{a}$, c'est-à-dire $v_0^2 = \frac{2}{m}\left(U_0 - \frac{2}{a}\right)$. — Le point S vient en Q et T vient en P. La racine x_1 est toujours simple; mais $x_2 = 0$ est racine double. Lorsque x tend vers zéro, la quantité sous le signe $\int$ devient infiniment grande du premier ordre; donc, l'in-

tégrale est infinie. Autrement dit, *le point* M *tend asymptotiquement vers* O. Il n'y a plus d'oscillation périodique.

Remarques. — I. Toutes les fois que M passe par A ou A′, *sa vitesse devient infinie.* Ceci est évidemment purement théorique et n'a aucun sens au point de vue expérimental. Dans la pratique, chaque point attirant a des dimensions finies, et un choc se produirait avant qu'il ne fût atteint par le mobile.

II. Dans le calcul du temps par une intégrale, il faut bien prendre garde que l'*expression algébrique de* U *en fonction de* x n'est pas la même suivant que M est à droite de A, à gauche de A′ ou entre A et A′.

III. L'intégrale qui donne le temps *ne peut pas se calculer par les fonctions élémentaires*, car elle porte sur un radical du quatrième degré. Il n'y a exception que dans le cas intermédiaire signalé plus haut, car, on peut alors faire sortir x^2 du radical et il ne reste plus, sous ce dernier, qu'un trinome du second degré. Nous laissons au lecteur le soin de développer l'intégration dans cette hypothèse.

Application numérique. — Le mobile part du point C sans vitesse initiale. On se trouve donc dans le *deuxième cas*. Il nous suffit d'étudier le mouvement de C à O, la suite s'en déduisant par symétrie ou périodicité. On a

$$t = -\int_{40}^{x} \frac{dx}{\sqrt{U - \frac{1}{15}}}. \tag{24}$$

Pour calculer numériquement cette intégrale et construire le diagramme des espaces, nous appliquons la *méthode des trapèzes*, en prenant des intervalles partiels égaux à 2. Toutefois, la *méthode ne s'applique pas au premier intervalle*, parce que la fonction à intégrer y devient infinie. Nous tournons cette difficulté en posant $x = 40 - z$ et remplaçant la quantité sous le radical par son développement suivant les puissances de z, arrêté au terme du second ordre (¹). En appliquant les méthodes du Chapitre VIII du Tome I, on trouve

$$t_{38} = \int_0^2 \frac{dz\sqrt{360}}{\sqrt{z\left(1 + \frac{7z}{150}\right)}} = 52,9. \tag{25}$$

En appliquant ensuite la méthode des trapèzes, nous avons obtenu le

(¹) On pourrait, avec une approximation moindre, se limiter au terme du premier ordre; les calculs seraient un peu plus simples.

Tableau suivant, où nous donnons en même temps les vitesses, évaluées en $\frac{1}{1000}$:

x.	v.	t.	x.	v.	t.
40.......	0	0	18.......	678	137
38.......	78	53	16.......	460	140
36.......	117	74	14.......	360	145
34.......	153	89	12.......	299	152
32.......	190	101	10.......	258	159
30.......	231	111	8.......	229	167
28.......	281	119	6.......	208	176
26.......	349	125	4.......	194	186
24.......	454	130	2.......	185	197
22.......	687	134	0.......	183	208
20.......	∞	135			

Les diagrammes sont reproduits sur la figure 16 ([1]).

La tangente en O au diagramme des vitesses s'obtient en dérivant (19) par rapport au temps et faisant $x = 40$. On trouve $x'' = -\frac{1}{720}\cdot$ La tangente cherchée passe donc par le point $\left(t = 72,\ v = \frac{10}{100}\right)\cdot$ On trouve de même que la tangente au point d'arrivée du même diagramme, qui correspond à $x = 0$, est horizontale. Enfin, le diagramme admet une asymptote $t = 135$, correspondant à $x = 20$.

Pour le diagramme des espaces, la tangente au point de départ est horizontale. On peut calculer le rayon de courbure, puisque l'on connaît la dérivée seconde $x'' = -\frac{1}{720}\cdot$ Mais il faut prendre garde aux échelles. L'unité de temps est représentée par $0^{mm},5$ et l'unité d'espace par 2^{mm}. On en conclut que, si (T, X) désignent les coordonnées d'un point du diagramme évaluées en millimètres, on a

$$X = 2x \qquad \text{et} \qquad T = \frac{t}{2};$$

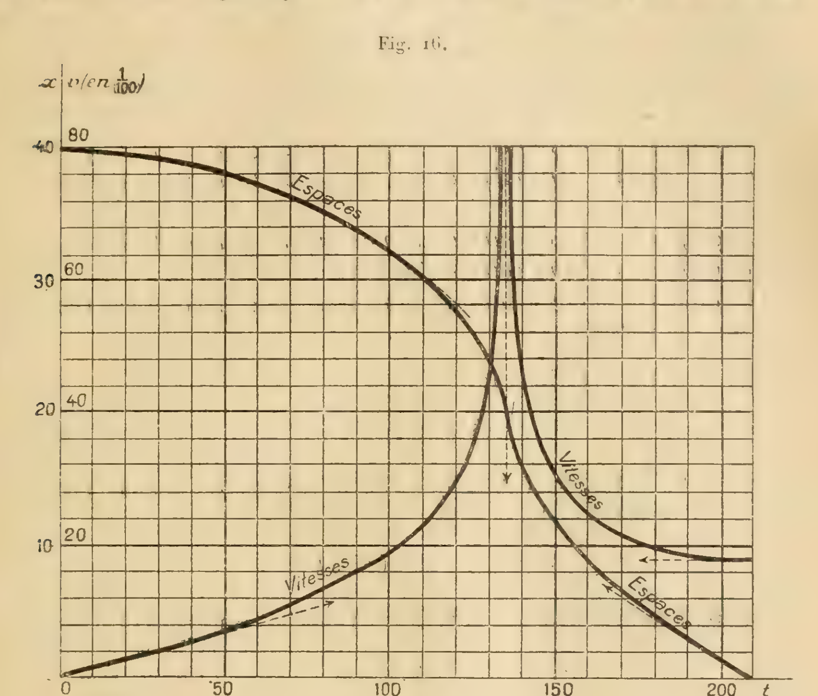
d'où

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = 8x'' = -\frac{1}{90}.$$

([1]) La précision des résultats numériques est évidemment superflue par rapport à celle du dessin. En réalité, celui-ci devrait être exécuté à une échelle beaucoup plus grande, sur du papier millimétré, par exemple.

Le rayon de courbure, qui est l'inverse de cette dérivée seconde (t. II, n° 313), est donc égal à 90^{mm}. On en déduit le tracé du cercle de cour-

Fig. 16.



bure, qui est très utile, car il se confond pratiquement avec la courbe jusqu'à $t = 100$.

Au point d'arrivée, le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{183}{1000}$. Comme la dérivée seconde est nulle, ce point est un point d'inflexion, et la tangente se confond avec la courbe sur un assez long parcours.

Au point (135, 20), la tangente est verticale; ce point est encore un point d'inflexion.

2. *La résistance en kilogrammes-poids que doit vaincre un cycliste roulant, en air calme, sur un sol horizontal, est* [1]

$$R = 0,01\,P + 0,005\,SV^2, \tag{1}$$

---

[1] *Cf.* BOURLET, *Bicycles et bicyclettes*, t. II, p. 89 (Gauthier-Villars).

P *désignant le poids total en kilogrammes du cycliste et de sa machine*, S *sa surface en mètres carrés et* V *sa vitesse en kilomètres à l'heure.*

1° *Démontrer que le travail minimum pour parcourir un espace donné en un temps donné est obtenu quand le mouvement est uniforme.*

2° *Quelle est la puissance développée par le cycliste s'il fait* 20^{km} *à l'heure, en palier, son poids étant de* 80^{kg} *et sa surface de* $\frac{1}{2}$ *mètre carré?*

3° *Avec quelle vitesse pourra-t-il monter une rampe de* 5 *pour* 100, *en développant toujours cette puissance?*

4° *Étudier son mouvement dans une descente en roue libre, sur une pente de* 5 *pour* 100.

1° La résistance est de la forme

$$R = a + bv^2. \tag{2}$$

Soient e et T l'espace et le temps donnés. Si le mouvement est uniforme et de vitesse V, on a

$$e = VT, \qquad \mathfrak{T} = (a + bV^2)e. \tag{3}$$

Supposons maintenant que la vitesse ne soit pas constante et posons

$$v = V + w. \tag{4}$$

On doit avoir

$$e = \int_0^T (V + w)\,dt = VT + \int_0^T w\,dt$$

ou

$$\int_0^T w\,dt = 0. \tag{5}$$

Le nouveau travail est

$$\mathfrak{T}' = \int_0^e (a + bV^2 + 2bVw + bw^2)\,dx.$$

L'accroissement de travail est

$$\Delta\mathfrak{T} = 2bV\int_0^e w\,dx + b\int_0^e w^2\,dx. \tag{6}$$

Le second terme est positif. Quant au premier, il peut s'écrire, au fac-

teur $2bV$ près,

$$\int_0^e w\,dx = \int_0^T w(V+w)\,dt = V\int_0^T w\,dt + \int_0^T w^2\,dt = \int_0^T w^2\,dt,$$

d'après (5). Il est également positif et l'on voit bien que le travail est augmenté. C. Q. F. D.

2° La puissance, en kilogrammètres par seconde, est

$$Q = R\frac{20000}{3600} = 1,8 \times \frac{200}{36} = 10,$$

ce qui fait $\frac{4}{30}$ de cheval ou 0,133 HP.

3° Dans la montée, le travail du cycliste égale le travail de la résistance R, augmenté du travail du poids P. Si v désigne la vitesse en mètres par seconde, on doit avoir

$$10 = (R + P \times 0,05)v = \left(4,8 + 0,0025 \times \overline{3,6}^2 v^2\right)v.$$

Cette équation du troisième degré n'a qu'une racine positive, qui est approximativement égale à 2,024. En multipliant par 3,6, on a la vitesse demandée en kilomètres à l'heure, soit $7^{\text{km}},3$.

4° Prenons les unités M. K. S. (n° 114). L'équation différentielle du mouvement est

$$(7) \qquad 80\frac{dv}{dt} = g(Pp - R) = 9,81\left(3,2 - 0,0025 \times \overline{3,6}^2 v^2\right).$$

La vitesse initiale étant supposée nulle, on en tire

$$(8) \qquad t = \int_0^v \frac{20\,dv}{9,81(0,8 - 0,0081\,v^2)}$$

$$= 125,5\int_0^v \frac{2\,dv}{v_1^2 - v^2} = \frac{125,5}{v_1}\,\mathrm{Log}\,\frac{v_1+v}{v_1-v},$$

en posant

$$(9) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{0,8}{0,0081}} = 9,95.$$

Si l'on pose

$$(10) \qquad t' = t\,\frac{v_1}{251} = 0,0395\,t,$$

on tire, de (8),

$$(11) \qquad v = v_1 \operatorname{th} t';$$

d'où, en intégrant,

$$(12) \qquad x = \int_0^t v\,dt = \int_0^{t'} v_1 \operatorname{th} t' \times \frac{251}{v_1}\,dt' = 251 \operatorname{Log}(\operatorname{ch} t').$$

La formule (11) montre que la vitesse va constamment en croissant et tend asymptotiquement vers la *vitesse limite* v_1, qui équivaut à $35^{\text{km}},8$ à l'heure. Pour avoir une idée de la rapidité avec laquelle cette vitesse est pratiquement atteinte, cherchons au bout de combien de temps le rapport $\frac{v}{v_1}$ atteint les valeurs $\frac{9}{10}$ et $\frac{99}{100}$.

A cet effet, nous utilisons la formule (8), qui s'écrit, en prenant des logarithmes vulgaires,

$$(13) \qquad t = \frac{125,5}{9,95 \times 0,434} \log\left(\frac{1 + \frac{v}{v_1}}{1 - \frac{v}{v_1}}\right) = 29,1 \log\left(\frac{1 + \frac{v}{v_1}}{1 - \frac{v}{v_1}}\right).$$

On trouve ainsi que les temps cherchés sont respectivement de 37 et 67 secondes. On peut dire qu'*au bout d'une minute, le mouvement est pratiquement uniforme, la vitesse étant environ* 36 *kilomètres à l'heure.*

3. *Un point parcourt la courbe*

$$(1) \qquad r^n = a^n \cos n\theta,$$

suivant la loi des aires par rapport au pôle. Calculer la force en fonction de r.

Appliquons la formule de Binet (n° 69). En dérivant logarithmiquement (1), on a

$$(2) \qquad u' = u \operatorname{tang} n\theta;$$

en dérivant encore une fois, il vient

$$u'' = u \operatorname{tang}^2 n\theta + \frac{nu}{\cos^2 n\theta},$$

$$u'' + u = u\,\frac{n + \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta}{\cos^2 n\theta} = (n+1)\,\frac{a^{2n}}{r^{2n+1}}.$$

En portant dans la formule de Binet, on obtient

$$(3) \qquad f = -\frac{m C^2 (n+1) a^{2n}}{r^{2n+3}}.$$

4. *Un point* M, *de masse* 1, *est soumis, de la part du point fixe* O, *à une attraction égale à* $\frac{4}{r^5}$. *Déterminer son mouvement. Montrer qu'on peut toujours choisir la vitesse initiale de telle manière que la trajectoire soit un cercle passant par* O. *Construire la trajectoire, ainsi que le diagramme* (r, t), *pour les conditions initiales suivantes :*

$$r_0 = 2, \qquad v_0 = 2, \qquad \widehat{OM_0 V_0} = 45^\circ.$$

Nous avons une force centrale, dérivant de la fonction $U = \frac{1}{r^4}$. La trajectoire est plane et les équations du mouvement en coordonnées polaires sont données par l'intégrale des aires et par l'intégrale des forces vives (n° 68)

$$(1) \qquad r^2\, d\theta = C\, dt,$$

$$(2) \qquad v^2 = \frac{2}{r^4} + h$$

ou

$$(3) \qquad dr^2 + r^2\, d\theta^2 = \left(\frac{2}{r^4} + h\right) dt^2.$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire, nous éliminons dt entre (1) et (3); il vient, tous calculs faits,

$$(4) \qquad \theta = \int_{r_0}^{r} \frac{C\, dr}{\pm\sqrt{h r^4 - C^2 r^2 + 2}}.$$

Le temps est ensuite donné par (1) :

$$(5) \qquad t = \int_{r_0}^{r} \frac{r^2\, dr}{\pm\sqrt{h r^4 - C^2 r^2 + 2}}.$$

Ces intégrales ne peuvent pas, en général, se calculer par les fonctions élémentaires. Les seuls cas où cela est possible sont obtenus quand le trinome sous le radical a une racine double ou bien s'abaisse au second degré. Le premier cas conduirait à une courbe transcendante, que nous laissons au lecteur le soin de calculer. Le second cas est obtenu

pour $h = 0$, c'est-à-dire $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{r_0^2}$. L'intégration est alors immédiate et donne

$$(6) \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{C}\sin(\theta + \varphi) \qquad (\varphi = \text{const.}),$$

ce qui est l'*équation polaire d'un cercle passant par le pôle.*

Application numérique. — On a $h = \frac{31}{8}$. Quant à C, on peut l'écrire

$$r_0 . r_0 \theta'_0 = r_0 v_0 \sin 45° = 2\sqrt{2}.$$

L'équation (4) devient

$$(7) \qquad \theta = 2\int_2^r \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{31}{16}r^4 - 4r^2 + 1}}.$$

Au temps zéro, la composante radiale de la vitesse est négative; donc, si nous choisissons le sens positif de rotation du plan dans le sens du mouvement, $\frac{dr}{d\theta}$ commence à être négatif et il faut commencer par prendre le signe — dans la formule (7). Comme le trinome sous le radical doit rester positif, r décroît jusqu'au moment où il atteint la plus grande racine de ce trinome, racine qui est égale à 1,33. Puis, r se met à augmenter jusqu'à l'infini; il faut alors prendre le signe + dans (7).

Au lieu de calculer l'intégrale (7), nous allons calculer

$$(8) \qquad \theta' = \int_{1,33}^r \frac{2\,dr}{\sqrt{\frac{31}{16}r^4 - 4r^2 + 1}}$$

et, de même,

$$(9) \qquad t' = \int_{1,33}^r \frac{r^2\,dr}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{31}{16}r^4 - 4r^2 + 1}}.$$

Les valeurs de θ et de t s'en déduiront en ajoutant les valeurs de θ' et de t' pour $r = 2$.

Nous avons calculé θ' pour $r = 1,4,\ 1,6,\ 1,8,\ \ldots,\ 3$, en appliquant la méthode de Simpson (t. I, n° 151). L'accroissement $\Delta\theta$ entre deux valeurs

consécutives r_0 et r_2 est donné par la formule

(10) $$\Delta\theta = \frac{0,2}{3}(z_0 + 4z_1 + z_2),$$

en appelant z_0, z_1, z_2 les valeurs que prend l'inverse du radical pour r_0, $r_1 = \frac{r_0 + r_2}{2}$ et r_2. Quant à Δt, on l'a calculé par la formule approchée

(11) $$\Delta t = \frac{r_1^2}{2\sqrt{2}}\Delta\theta.$$

Ceci ne s'applique pas pour le premier intervalle (1,33; 1,4), puisque z_0 est alors infini. On a employé le même procédé que dans l'Exercice n° 1. En faisant le changement de variable $r = 1,33 + h$ et négligeant les termes en h^3 et en h^4 sous le radical, on trouve que la valeur de θ' pour $r = 1,4$ est 0,366. Celle de t' se calcule ensuite par la formule (11), ce qui donne 0,242.

Le Tableau ci-dessous donne le résultat des calculs numériques ci-dessus indiqués, les valeurs de θ' ayant été transformées en degrés :

r.	θ'.	t'.
1,4	21	0,242
1.6	39,3	0,498
1,8	49.1	0,673
2	55,8	0,823
2,2	60,8	0,960
2,4	64,7	1,088
2,6	68	1,212
2,8	70,6	1,331
3	72,9	1,448

Pour $r > 3$, posons $r = \frac{1}{u}$; nous avons

(12) $$\Delta\theta = \int_u^{\frac{1}{3}} \frac{2\,du}{u\sqrt{\frac{31}{16} - 4u^2 + u^4}}.$$

On peut pratiquement négliger u^4 sous le radical et l'on a alors la formule approchée

(13) $$\Delta\theta = \arcsin\frac{8}{3\sqrt{31}} - \arcsin\frac{8u}{\sqrt{31}} = 28^\circ,1 - \arcsin\frac{8u}{\sqrt{31}}.$$

On en conclut qu'à partir de $r = 3$, on peut pratiquement confondre la

trajectoire avec la droite définie par l'équation

$$(14) \qquad r\sin(\theta - 28°,1) + \frac{8}{\sqrt{31}} = 0,$$

droite qui est donc une asymptote.

On aurait pu prévoir l'existence de cette asymptote. D'abord, il y a une direction asymptotique, car l'intégrale (8) a une limite pour r infini (t. I, n° 153). On peut ensuite calculer facilement la sous-asymptote, grâce à l'artifice suivant. La constante des aires $C = v\,d$, d désignant la distance de la tangente à la trajectoire au pôle, puisqu'elle est égale au moment du vecteur vitesse par rapport à O (n° 7). Or, lorsque r devient infini, v tend vers $\sqrt{h}$, d'après (2); donc, d tend vers $\frac{C}{\sqrt{h}} = \frac{8}{\sqrt{31}}$, ce qui est bien la distance de la droite (14) au pôle.

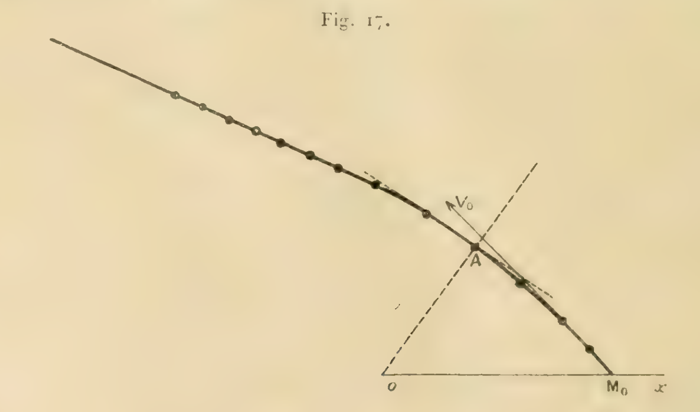
Pour les grandes valeurs de r la formule (2) donne sensiblement

$$(15) \qquad v = \sqrt{h} = 1,97.$$

On peut donc dire que, *pratiquement, à partir de $r = 3$, le mouvement est un mouvement rectiligne et uniforme, de vitesse* 1,97 [1].

Lorsque r décroît de 2 à 1,33, θ et t subissent les mêmes accroissements que lorsque r croît de 1,33 à 2. Autrement dit, la trajectoire est symétrique par rapport à la droite $\theta = 55°,8$, qui passe par le point A le plus rapproché du pôle; en outre, deux points symétriques quelconques

Fig. 17.

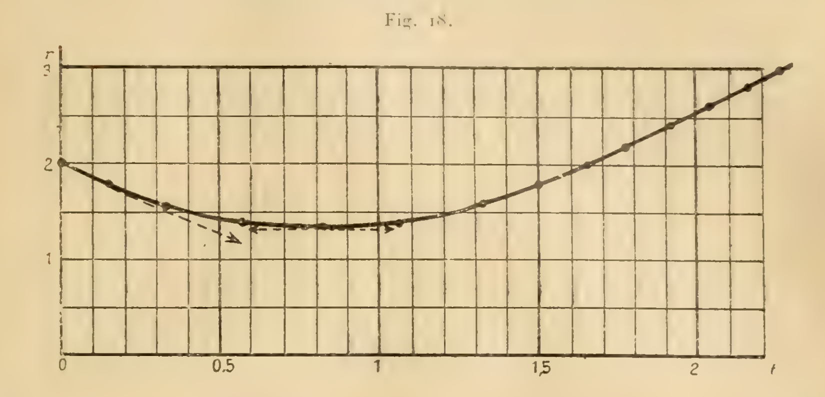


sont atteints à des époques équidistantes de l'époque où le mobile passe en A. Cela permet de déduire la trajectoire complète (*fig.* 17) du

(1) A l'échelle des figures 17 et 18, cela est même vrai à partir de $r = 2$.

Tableau donné plus haut, ainsi que le diagramme (r, t) demandé (*fig.* 18). (On a représenté les unités de r et de t par 15^{mm} et 5^{cm}.)

Fig. 18.



5. *Étudier le mouvement d'un point pesant assujetti à glisser sans frottement le long d'une parabole à axe vertical.*

Prenons pour axe des x la tangente au sommet et pour axe des y l'axe de la parabole, dirigé vers la concavité. Soit

$$(1) \qquad x^2 = 2py$$

l'équation de cette courbe, le paramètre p étant positif, d'après l'hypothèse ci-dessus.

Supposons d'abord que *la parabole tourne sa concavité vers le haut*: Oy est alors dirigé de bas en haut et le poids du mobile M a pour mesure algébrique $-mg$; il dérive de la fonction de force $-mgy$. Comme il n'y a pas de frottement, on peut appliquer le théorème des forces vives en négligeant la réaction (n° 71), ce qui donne

$$(2) \qquad v^2 = -2gy + h.$$

Calculons v^2 en fonction de y et de y'. On a

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = y'^2\left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right) = y'^2\left(1 + \frac{p}{2y}\right),$$

en tenant compte de l'équation (1). En portant cette expression dans (2), on obtient l'équation différentielle qui donne y. Elle ne renferme pas explicitement t; par conséquent, les variables se séparent (t. I, n° 188). On résout l'équation par rapport à dt; puis on intègre et l'on trouve, tous

calculs faits,

$$(3)\qquad t = \int_{y_0}^{y} \pm\sqrt{\frac{2y+p}{2y(h-2gy)}}\,dy.$$

Calculons la réaction. Orientons la parabole dans le sens des x croissants et soit N la mesure algébrique de la réaction sur la normale positive, laquelle est dirigée vers la concavité de la parabole. Projetons $\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{\gamma}$ sur Oy :

$$(4)\qquad my'' = -mg + \mathrm{N}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

en appelant α l'angle polaire de la demi-tangente positive. On tire de là

$$(5)\qquad \mathrm{N} = m\frac{y''+g}{\cos\alpha}.$$

Pour calculer y'', dérivons, par rapport à t, l'équation

$$(6)\qquad y'^2 = \frac{2y(h-2gy)}{p+2y},$$

qui n'est autre que (3) avant l'intégration; il vient, en divisant par $2y'$ et formant tout de suite la combinaison $y''+g$,

$$(7)\qquad y''+g = \frac{p(h+gp)}{(p+2y)^2}.$$

Nous avons ensuite

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p};$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\cos\alpha$ doit être positif, d'après la convention faite sur l'orientation de la parabole,

$$(8)\qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{p}{2y+p}}.$$

En portant (7) et (8) dans (5), on trouve finalement

$$(9)\qquad \mathrm{N} = \frac{m\sqrt{p}\,(h+gp)}{(p+2y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on veut maintenant supposer que la parabole tourne sa concavité vers le bas, cela revient simplement à *changer le sens de la pesanteur* et il suffit de changer g en $-g$ dans tout ce qui précède.

Discussion. — Nous allons maintenant étudier quelles sont les diverses circonstances que peut présenter le mouvement, en supposant la *liaison unilatérale*, le point M pouvant être posé sur la parabole soit d'un côté, soit de l'autre.

Premier cas : *La concavité est tournée vers le haut.* — Pour que le radical de l'équation (3) soit réel, il faut que y ne dépasse pas $\frac{h}{2g} = y_1$. Si le point est lancé vers le haut, y commence par croître et il faut prendre le signe $+$ dans (3). Quand y tend vers y_1, t tend vers une valeur finie, car la quantité sous le signe $\int$ devient infinie d'ordre $\frac{1}{2}$ (t. I, n° 154). Comme y ne peut dépasser y_1, il se met à décroître et l'on doit prendre le signe $-$ dans (3); y décroît jusqu'à zéro, puis croît jusqu'à y_1 et ainsi de suite indéfiniment. Le mouvement est une *oscillation périodique* sur l'arc de la parabole qui est limité par les deux points d'ordonnée y_1.

Quant à la réaction, elle est toujours positive, car h est positif, en vertu de (2). Il s'ensuit que *le point* M *doit être posé à l'intérieur de la parabole, sans quoi il la quitte immédiatement.*

Deuxième cas : *La concavité est tournée vers le bas.* — Si nous changeons g en $-g$ dans (3), nous voyons que la réalité du radical exige

$$h + 2gy > 0. \tag{10}$$

Cela nous conduit à distinguer deux cas suivant le signe de h.

I. $h < 0$ ou $v_0 < \sqrt{2gy_0}$. y doit être supérieur à $-\frac{h}{2g} = y_1$. Si le point est lancé vers le haut, y commence par décroître, atteint y_1 en un temps fini, puis augmente jusqu'à l'infini, t devenant également infini, parce que la quantité sous le signe $\int$ est seulement infiniment petite d'ordre $\frac{1}{2}$ (t. I, n° 153). Autrement dit, *le point* M *atteint une position culminante* M_1, *puis redescend indéfiniment. S'il est lancé primitivement vers le bas, il descend toujours.*

La formule (9), où l'on aurait changé g en $-g$, montre que, dans l'hypothèse actuelle, $N < 0$; il faut donc *poser* M *à l'extérieur de la parabole.*

II. $h > 0$ ou $v_0 > \sqrt{2gy_0}$. Cette fois le radical est réel, quel que soit y; *le point décrit entièrement la parabole dans le sens de la vitesse initiale, sans jamais rebrousser chemin.*

Quant à la réaction, elle est négative ou positive, suivant que h est inférieur ou supérieur à gp; suivant le cas, M doit être *posé à l'extérieur ou à l'intérieur.*

Dans le cas intermédiaire où $h = gp$, la réaction est identiquement nulle; *le point décrit librement la parabole.* On doit donc retomber sur le mouvement classique du point pesant libre dans le vide (nº 76).

Effectivement, l'équation (3) se réduit à

$$t = \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{2y}{g}}, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2,$$

en choisissant convenablement l'origine des temps. L'équation (1) donne ensuite

$$x = \sqrt{pg}\, t.$$

Un autre cas intermédiaire est $h = 0$. On peut alors intégrer par les fonctions élémentaires et l'on trouve, tous calculs faits et en choisissant convenablement l'origine des temps,

$$(11) \qquad \sqrt{g}\, t = \sqrt{p + 2y} + \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\log\left(\sqrt{p + 2y} - \sqrt{p}\right) - \log\sqrt{y}\right].$$

Si M est lancé vers le haut, *il atteint asymptotiquement le sommet*, car t devient infini pour $y = 0$.

Remarque. — Il est facile de s'expliquer les résultats obtenus en ce qui concerne la possibilité, pour le mobile, de quitter la parabole. Cette circonstance se présente si la trajectoire libre se trouve du côté où l'on a posé M. Or, dans le premier cas, la trajectoire libre est toujours extérieure à la parabole donnée; donc, le point quitte toujours, s'il est posé extérieurement. Dans le deuxième cas, il faut comparer les paramètres des deux paraboles. Si p' est celui de la trajectoire libre qui correspond aux conditions initiales données, un calcul facile donne

$$(12) \qquad p' - p = \frac{p(h - gp)}{g(p + 2y_0)}.$$

Si $h > gp$, $p' > p$, la parabole libre est extérieure à la proposée, le point quitte s'il est posé extérieurement.

6. *Un point pesant peut glisser, sans frottement, le long d'une circonférence, qui tourne autour d'un diamètre vertical, avec une vitesse angulaire constante* ω.

1º *Étudier le mouvement du point sur la circonférence.*

2° *Calculer les composantes de la réaction.*

3° *Chercher les positions d'équilibre relatif et étudier leur stabilité. Étudier les petites oscillations.*

4° *On suppose le rayon du cercle égal à* 20^{cm} *et la vitesse de rotation égale à* 200 *tours par minute. Calculer la position d'équilibre stable, ainsi que la durée des petites oscillations.*

1° Prenons pour axe des z l'axe de rotation, orienté de bas en haut, et pour axes des x et des y deux axes perpendiculaires menés par le centre du cercle. Soient $\varphi = \omega t$ l'azimut du cercle au temps t et θ l'angle de Oz avec OM, de sorte que φ et θ sont la longitude et la colatitude du point M.

Pour trouver l'équation du mouvement, *nous allons projeter* $\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{\gamma}$ *sur la tangente* MX *au cercle*, dont les angles polaires sont φ et $\theta + \frac{\pi}{2}$. En dérivant deux fois les coordonnées cartésiennes de M exprimées en fonction de φ et de θ, on trouve

$$(1)\quad \begin{cases} x'' = \quad R[-(\omega^2 + \theta'^2)\sin\theta + \theta''\cos\theta]\cos\varphi - 2R\omega\theta'\cos\theta\sin\varphi, \\ y'' = \quad R[-(\omega^2 + \theta'^2)\sin\theta + \theta''\cos\theta]\sin\varphi + 2R\omega\theta'\cos\theta\cos\varphi, \\ z'' = -R[\theta'^2\cos\theta + \theta''\sin\theta]. \end{cases}$$

En multipliant ces trois équations respectivement par $\cos\theta\cos\varphi$, $\cos\theta\sin\varphi$, $-\sin\theta$ et ajoutant, on obtient la projection du vecteur accélération sur MX :

$$(2)\qquad \gamma_X = R(\theta'' - \omega^2\sin\theta\cos\theta).$$

D'autre part, la projection du poids de M est $mg\sin\theta$ et, comme la projection de la réaction est nulle, on a

$$(3)\qquad R\theta'' = \sin\theta(g + R\omega^2\cos\theta).$$

Telle est l'équation différentielle du mouvement.

On peut remarquer qu'elle est la même que si le cercle ne tournait pas, à condition d'ajouter à la pesanteur la *force centrifuge* (n° 138)

$$m\omega^2\overrightarrow{PM},$$

P désignant la projection de M sur Oz. On aurait pu être tenté d'admettre directement ce résultat. Mais il n'est pas si évident qu'il en a l'air. Il tient, en réalité, à ce que l'accélération complémentaire est constamment normale au cercle (elle est perpendiculaire à son plan; *cf.* Exer-

cice proposé n° 2 du Chapitre III) et n'intervient pas, par conséquent, dans la projection sur MX.

L'équation (3) s'intègre par deux quadratures (t. I, n° 195; on peut aussi remarquer que la première intégration équivaut à appliquer l'intégrale des forces vives, en prenant un trièdre de référence lié au cercle). On obtient, tous calculs faits,

$$(4) \qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R\omega\, d\theta}{\pm\sqrt{C^2 - (g + R\omega^2 \cos\theta)^2}},$$

C désignant une constante positive, donnée, en fonction des conditions initiales, par la formule

$$(5) \qquad C^2 = R^2\omega^2\theta_0'^2 + (g + R\omega^2 \cos\theta_0)^2.$$

L'intégrale (4) ne peut pas, en général, se calculer par les fonctions élémentaires. Toutefois, pour qu'elle soit réelle, il faut que $\cos\theta$ reste compris entre

$$(6) \qquad \cos\theta_1 = \frac{C - g}{R\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta_2 = -\frac{C + g}{R\omega^2}.$$

Si $C > g + R\omega^2$, les angles θ_1 et θ_2 sont imaginaires et le radical est toujours réel; le point M tourne indéfiniment sur le cercle, d'un mouvement périodique.

Si $g + R\omega^2 > C > R\omega^2 - g$, θ_1 seul existe; M *oscille sur l'arc inférieur limité par les deux points* M_1 *et* M'_1 *d'élongations* θ_1 *et* $-\theta_1$.

Si $C < R\omega^2 - g$ (cela n'est possible que si $R\omega^2 > g$), θ_1 et θ_2 existent tous deux; M *oscille entre deux points* M_1 *et* M_2 *situés d'un même côté de* Oz (le second est toujours au-dessous de xOy).

2° En projetant $\vec{f} = m\vec{\gamma}$ sur le prolongement MZ de OM et sur MY perpendiculaire à MZX $\left(\text{d'angles polaires } \varphi + \frac{\pi}{2} \text{ et } \text{o}\right)$, on obtient les composantes de la réaction

$$(7) \qquad \begin{cases} R_Z = m\,\dfrac{(g + R\omega^2\cos\theta)(g + 2R\omega^2\cos\theta) \quad (C^2 + R^2\omega^4)}{R\omega^2}, \\ R_Y = 2mR\omega\theta'\cos\theta = 2m\cos\theta\sqrt{C^2 - (g + R\omega^2\cos\theta)^2}. \end{cases}$$

On voit qu'elle n'est dans le plan du cercle que pour $\theta' = \text{o}$, c'est-à-dire quand la vitesse relative de M est nulle. (La composante R_Y est opposée à l'accélération complémentaire.)

3° Pour que θ demeure constant, il faut et il suffit que, θ'_0 étant nul, θ_0 annule le second membre de (3). On a ainsi les trois solutions

$$(8) \qquad \theta_0 = 0, \qquad \theta_0 = \pi, \qquad \theta_0 = a \qquad \text{avec} \qquad \cos a = -\frac{g}{R\omega^2}.$$

Les deux premières correspondent aux points le plus haut et le plus bas du cercle et la troisième a une position intermédiaire A, qui n'existe que si $R\omega^2 > g$, et qui est toujours au-dessous de xOy.

Pour étudier la stabilité, supposons M_0 très voisin de l'une de ces positions et θ'_0 très petit. Il faut voir si M va rester dans le voisinage.

S'il s'agit de la première position, C est, d'après (5), très voisin de $g + R\omega^2$. On se trouve soit dans le cas de la rotation indéfinie, soit dans le cas de l'oscillation entre M_1 et M'_1. Le mobile passe certainement par le point le plus bas et ne reste donc pas dans le voisinage du point le plus haut. L'équilibre est *instable*.

S'il s'agit de la deuxième position, C est voisin de $|g - R\omega^2|$. Si $R\omega^2 > g$, C est voisin de $R\omega^2 - g$, $\cos\theta_1$ est voisin de $1 - \frac{2g}{R\omega^2}$ et n'est pas infiniment voisin de -1; donc M_1 n'est pas dans le voisinage du point le plus bas. Comme il est atteint par M pendant le mouvement, l'équilibre est instable. Si, au contraire, $R\omega^2 < g$, C est voisin de $g - R\omega^2$, $\cos\theta_1$ est voisin de -1 et, comme on se trouve dans le cas de l'oscillation entre M_1 et M'_1, M reste constamment dans le voisinage du point le plus bas, qui est alors *une position d'équilibre stable.*

Enfin, s'il s'agit de la troisième position d'équilibre, C est voisin de zéro, θ_1 et θ_2 sont voisins de a; *l'équilibre est stable.*

On voit que, *dans tous les cas, il n'y a qu'une position stable; c'est le point le plus bas pour les petites vitesses de rotation et le point* A *pour les grandes vitesses.*

Étudions les *petites oscillations* dans la première hypothèse. Si l'on pose $\theta = \pi - u$ et que l'on considère u comme un infiniment petit, l'équation (3) se réduit, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à l'équation linéaire à coefficients constants

$$(9) \qquad u'' + u\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) = 0.$$

En supposant, pour simplifier, $\theta'_0 = 0$, on a

$$(10) \qquad u = u_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}\, t\right).$$

La durée d'une oscillation simple (demi-période) est

$$(11) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{R}{g - R\omega^2}}.$$

Elle est la même que si le cercle était au repos, l'accélération de la pesanteur étant diminuée de $R\omega^2$.

Si, maintenant, $R\omega^2 > g$, nous posons $\theta = a + u$ et l'équation (3) se réduit à

$$(12) \qquad u'' + u\,\omega^2 \sin^2 a = 0;$$

d'où l'on tire

$$(13) \qquad u = u_0 \sin(\omega \sin a \,.\, t).$$

La durée d'une oscillation est

$$(14) \qquad T = \frac{\pi}{\omega \sin a} = \frac{T'}{2 \sin a},$$

en appelant T' la durée d'un tour complet du cercle.

4° On a, en unités C. G. S.,

$$R = 20, \qquad \omega = \frac{20\pi}{3}, \qquad g = 981, \qquad \cos a = -0,1117, \qquad a = 107^g,1;$$
$$T = 0,503\,T' = 0^s,15.$$

7. *Un point pesant* M *peut glisser avec frottement le long d'une droite horizontale* D. *Il est, en outre, attiré par un point fixe* P, *extérieur à* D *et situé dans le plan vertical passant par cette droite, suivant une force proportionnelle à la distance* PM. *Étudier son mouvement.* (É. P., 1913.)

Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y la perpendiculaire menée par P, orientée de bas en haut. Soient m la masse du point, f le coefficient de frottement et $k\,\overrightarrow{MP}$ l'attraction du point P. Soient R_x et R_y les composantes de la réaction de D sur M. Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad m x'' = -kx + R_x, \qquad 0 = kb - mg + R_y,$$

en appelant b l'ordonnée de P.

Appliquons maintenant les lois du frottement. La composante normale

de la réaction est

(2) $$N = |R_y| = |mg - kb|.$$

On a

$$R_x = -fN \quad \text{ou} \quad +fN,$$

suivant que x' est positif ou négatif. L'équation différentielle du mouvement est donc

(3) $$mx'' + kx = -fN, \quad \text{si} \quad x' > 0;$$

(4) $$mx'' + kx = \ \ fN, \quad \text{si} \quad x' < 0.$$

Les intégrales générales sont (t. I, n° 197)

(5) $$x = -a + A\cos\omega t + B\sin\omega t, \quad \text{pour} \quad x' > 0;$$

(6) $$x = \ \ a + A\cos\omega t + B\sin\omega t, \quad \text{pour} \quad x' < 0,$$

en posant

(7) $$a = \frac{fN}{k}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le mouvement est donc un mouvement vibratoire simple, dont la période est indépendante du frottement, mais dont le centre est l'un ou l'autre des points $A'(-a, 0)$ *et* $A(a, 0)$, *suivant que le mouvement a lieu dans le sens positif ou dans le sens négatif.*

Quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du mobile s'annule au bout d'un temps au plus égal à une demi-période. Il y a alors lieu de se demander *quel mouvement prend naissance, pour une vitesse initiale nulle.*

On pourrait étudier la question par le calcul, en se servant des équations (5), (6). Mais il nous paraît plus simple de voir les choses géométriquement.

Si le mobile part dans le sens positif, la vibration doit avoir pour centre A', et, comme on se trouve à un maximum d'élongation, M doit se rapprocher de A'. Ceci n'est possible que si M_0 est à gauche de A'. De même, le mouvement de droite à gauche n'est possible que si M_0 est à droite de A. *Lorsque* M_0 *est entre* A *et* A', *aucun mouvement n'est donc possible;* le point reste au repos. Ceci est d'ailleurs bien conforme avec les lois du frottement au repos (n° 139), car le rapport

$$\frac{|R_x|}{N} = \frac{k\,|x_0|}{N} = \frac{f\,|x_0|}{a}$$

est alors plus petit que f.

Il est maintenant facile de se représenter les *phases successives du mouvement*. Le mobile commence par se déplacer dans le sens de sa vitesse initiale, jusqu'à une position extrême M_1. Si M_1 est sur le segment AA', il s'arrête. Sinon, il repart en sens inverse, en vibrant autour de celui des points A et A' qui est le plus rapproché de M_1, soit A, pour fixer les idées. Il atteint ainsi une position extrême M_2, symétrique de M_1 par rapport à A. Si M_2 est sur AA', le mouvement s'arrête. Sinon, M repart en sens inverse, en vibrant autour de A', et atteint la position extrême M_3, symétrique de M_2 par rapport à A', et ainsi de suite. On a donc une *succession de demi-vibrations, se produisant alternativement autour des deux points* A *et* A'. Il est visible que, chaque fois, l'amplitude diminue de la distance $AA' = 2a$. Elle finit donc par être inférieure à cette distance; à ce moment, la position extrême atteinte par le mobile est intérieure au segment AA'; le mouvement est terminé. Si d désigne la distance de M_1 à l'extrémité la plus rapprochée du segment AA', le nombre des demi-vibrations qui s'effectuent à partir de cette position est le quotient à une unité près par excès de d par $2a$.

Remarque. — Le mouvement s'amortit d'autant plus rapidement que a est plus grand, c'est-à-dire, toutes choses égales d'ailleurs, que N est plus grand. Cela est bien conforme au bon sens, car, en augmentant N, on augmente le frottement. En particulier, l'amortissement est plus rapide si P est au-dessous de D que s'il est au-dessus. Lorsque P est au-dessus, à une distance égale à $\frac{mg}{k}$, N est nul; il n'y a plus de frottement et le mouvement ne s'amortit pas; c'est un mouvement vibratoire simple ordinaire.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Déterminer les lignes de forces du champ dont les composantes sur les axes sont y, z, x. (É. P., 1913.)

(Introduire une variable auxiliaire, dont la différentielle est $\frac{dx}{y}$. On se ramène à une équation différentielle de la forme $x''' = x$, qui s'intègre par la méthode de l'équation caractéristique.)

2. Quelles sont les surfaces de niveau et les lignes de forces du champ

$$X = y + z, \qquad Y = z + x, \qquad Z = x + y.$$

Montrer que les lignes de forces sont des cubiques planes unicursales. (É. P., 1913.)

(Introduire une variable auxiliaire analogue à celle de l'exercice précédent. Introduire également l'inconnue auxiliaire $u = x + y + z$, qui satisfait à l'équation différentielle $u' = 2u$.)

3. On considère un champ de forces dont les composantes sont des fonctions linéaires de x, y, z. A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients de ces fonctions pour que le champ dérive d'une fonction de forces? Que sont alors les surfaces de niveau? Montrer que, par un choix convenable des axes de coordonnées, on peut amener les composantes du champ à être respectivement proportionnelles à x, y, z. Chercher les lignes de forces. Dans quel cas sont-elles planes?

4. Chercher la fonction de forces dont dérive le champ

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Z = 0.$$

Surfaces de niveau et lignes de forces. (É. P., 1913.)

5. Au point $M(x, y, z)$, on fait correspondre le point

$$Q\left(\frac{a^2 x}{x^2+y^2}, \frac{a^2 y}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Le point M est soumis à la force $k^2 \overrightarrow{MQ}$, k désignant une constante.

1° Déterminer la fonction de forces, les surfaces de niveau et les lignes de forces.

2° Le point M ayant pour masse 1, déterminer le mouvement de sa projection sur Oz.

3° Montrer qu'on peut choisir les conditions initiales pour que la projection de M sur xOy décrive un cercle de centre O et de rayon $R > a$. Exprimer, dans cette hypothèse, les coordonnées de M en fonction de t. Montrer que la trajectoire est algébrique si $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ est le carré d'un nombre rationnel. (É. P., 1907; composition écrite.)

6. Chercher les lignes de forces du champ

$$X = x^2, \qquad Y = y^2 - 2xy, \qquad Z = 0.$$

(É. P., 1913.)

(Remarquer qu'on a une équation différentielle homogène en x, y. On trouve des quartiques.)

7. Soit le champ

$$X = (x^2 + y^2)(x - y), \qquad Y = (x^2 + y^2)(x + y), \qquad Z = z^2.$$

1° Déterminer les lignes de forces. (Il est commode de chercher leurs équations en coordonnées semi-polaires.)

2° Calculer le travail, quand M se déplace sur une ligne de forces, depuis l'origine jusqu'au point de cote z.

3° Calculer le travail, quand M fait un tour complet sur une circonférence située dans un plan parallèle à xOy. Le rayon de cette circonférence étant donné, où doit se trouver son centre pour que le travail soit minimum?

8. On considère la fonction de forces $U = -\frac{\cos\theta}{r^2}$, en coordonnées polaires. Calculer les composantes de la force suivant les demi-droites d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$. Construire les lignes de niveau et les lignes de forces.

(Pour calculer les composantes, il est commode de se servir du travail élémentaire.)

9. Mêmes questions pour la fonction de forces $U = -\frac{\cos\theta}{r}$.

10. On considère une sphère creuse infiniment mince et homogène. Chaque élément de cette sphère attire un point P proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance. Calculer la fonction des forces pour une position quelconque de P. Déduire du résultat que l'attraction totale subie par le point P est nulle s'il est intérieur à la sphère et qu'elle est la même que si toute la masse de la sphère était ramenée au centre, si P est extérieur à la sphère. (Pour calculer la fonction des forces U, découper par des plans perpendiculaires à OP. On trouve aisément que $dU = \frac{2\pi R}{a} dr$, en appelant R le rayon de la sphère, a la distance OP et dr l'accroissement de la distance $r = PM$, quand M passe de la petite base à la grande base de la zone comprise entre les deux plans infiniment voisins. On en conclut, en intégrant, que $U = 4\pi R$, si P est intérieur, et $U = \frac{4\pi R^2}{a}$, si P est extérieur. On a supposé, pour simplifier, la densité superficielle égale à 1.)

11. Une sphère homogène ou, plus généralement, composée de couches concentriques homogènes, attire un point P extérieur suivant la loi indiquée à l'exercice précédent. Démontrer que l'attraction totale est la même que si toute la masse de la sphère était accumulée en son centre.

(Découper par des sphères concentriques et appliquer les résultats de l'exercice précédent.)

12. Un point pesant, de masse 1, est attiré par O suivant une force égale à $\frac{1}{\overline{MO}^2}$. Chercher la fonction de forces, les surfaces de niveau et les lignes de forces.

(Pour les lignes de forces situées dans zOx, passer en coordonnées polaires; on aboutit à une équation différentielle linéaire en r^2.)

13. Reprendre l'Exercice résolu n° 1, en supposant que l'un des centres est répulsif.

14. Soit un point M, de masse 1.

1° On donne une droite indéfinie D, homogène, de densité linéaire 1. Chaque élément P de cette droite attire M suivant une force proportionnelle à la masse de cet élément et au sinus de l'angle que fait PM avec l'élément. Calculer la résultante de toutes ces forces.

2° Même question en remplaçant la droite D par un plan Q, homogène et de densité superficielle 1.

3° On suppose Q perpendiculaire à D en O. Le point M étant soumis simultanément à toutes les forces précédentes, trouver les surfaces de niveau et les lignes de forces.

4° Une tige OT tourne autour de D d'un mouvement uniforme. Le point M glisse sans frottement le long de cette tige. Déterminer son mouvement, en le supposant toujours soumis aux forces précédentes.

5° Montrer que, si les conditions initiales sont convenablement choisies, la trajectoire de M se projette sur Q suivant un cercle. Chercher la réaction de la tige, dans cette hypothèse. Montrer que, si les coefficients d'attraction sont convenablement choisis, cette réaction se trouve constamment dans le plan tangent au cône décrit par OT. Son extrémité décrit alors une courbe qui se projette sur Q suivant un cercle.

15. Quel travail faut-il dépenser pour enrouler sur un treuil une chaîne de 100^{m} de long, pesant 25^{kg} par mètre courant?

16. Établir le théorème des forces vives, en se servant des équations intrinsèques du mouvement.

17. Un canon, de calibre 160^{mm}, tire un projectile de 52^{kg}. Le culot de ce dernier parcourt dans le tube une longueur de $6^{m},70$. Il est soumis à une pression variable, dont la valeur moyenne par rapport au chemin

parcouru est de 1600^{kg} par centimètre carré. Calculer la vitesse initiale du projectile, en négligeant les résistances passives. (On trouve environ 900^m.)

18. Un obus de rupture, de calibre 340^{mm} et de poids 540^{kg}, traverse une plaque de blindage, de 34^{cm} d'épaisseur. Sa vitesse à l'arrivée est de 400^m par seconde; la vitesse à la sortie est nulle. Calculer la pression moyenne, par centimètre carré de section, développée par la plaque sur l'obus pendant la traversée.

19. Un point M, de masse 115^g, se déplace sur Ox. Il est attiré par O suivant une force proportionnelle à x^4. Pour $x = 1^m$, l'attraction est de 1^{kg}. On le lance dans le sens positif, avec une abscisse initiale égale à $1^m,40$ et une vitesse initiale de $3^m,60$ par seconde. Construire les diagrammes (x, v) et (x, t).

20. Un point M décrit Ox, sous l'action d'une attraction de O proportionnelle à x. Il est, en outre, soumis à une résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse. Calculer cette vitesse en fonction de x. La vitesse initiale étant supposée nulle, calculer le travail absorbé par la résistance, quand M arrive en O. Comparer ce calcul direct avec celui que donne le théorème des forces vives.

21. Déterminer le mouvement d'un point M, de masse 1, se déplaçant sur Ox, sous l'action de la force $X = -xv - v^2$. (É. P., 1913.) Pousser les calculs jusqu'au bout, en supposant M_0 en O et $v_0 = 1$.

22. Trouver les lois de force centrale fonction de la distance qui peuvent donner les trajectoires suivantes :

$$r = a\cos^2\frac{\theta}{2}, \qquad r = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}, \qquad r = e^{m\theta},$$
$$r\cos m\theta = a, \qquad r\,\mathrm{ch}\, m\theta = a.$$

23. Un point M, de masse 1, est attiré par O suivant une force égale à $\frac{1}{r^3}$. Étudier les différentes formes de trajectoires. Calculer les coordonnées de M en fonction de t. (*É. N., groupe II*, 1912; composition écrite.)

24. Un point pesant décrit, sans frottement, une courbe située dans un plan vertical. Déterminer cette courbe pour que la vitesse verticale soit constante. (É. P., 1913.)

(Introduire l'angle de la tangente avec la verticale. On trouve une parabole semi-cubique.)

25. Un point M, de masse 1, décrit sans frottement la parabole

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}.$$

Il est soumis à une attraction de O égale à $\frac{1}{r^2}$. On le lance, avec la vitesse v_0, à partir du sommet. Déterminer son mouvement. Calculer la réaction en fonction de θ. Vérifier que cette réaction est constamment nulle, si v_0 est convenablement choisie. Expliquer ce résultat. (*Certificat de Mathématiques générales;* Clermont, 1911. *Cf.* Exercice résolu n° 5.)

26. Un point pesant glisse sans frottement sur la courbe

$$x = \varphi - \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi, \qquad y = 2 \operatorname{ch}\varphi.$$

L'axe Oy étant placé verticalement et dirigé vers le bas, on abandonne le point, sans vitesse initiale, à partir du point situé sur Oy. Calculer le mouvement qui prend naissance. Au bout de combien de temps le point s'est-il abaissé de 1^m?

27. Un point pesant glisse sans frottement sur une cycloïde, dont le plan est vertical et dont la concavité est tournée vers le haut. On l'abandonne sans vitesse initiale, à partir d'une position quelconque. Déterminer le mouvement qui prend naissance. Calculer la durée d'une oscillation. Vérifier qu'elle est indépendante de la position initiale. (*Pendule cycloïdal.*)

28. Un point pesant glisse sur une hélice circulaire. Étudier son mouvement en supposant qu'il n'y a pas de frottement et que l'axe de l'hélice fait un angle quelconque avec la verticale, puis qu'il y a frottement, mais que l'axe est vertical.

29. Une tige tourne avec une vitesse angulaire constante ω, dans un plan vertical, autour de son extrémité O. Un point pesant M glisse sans frottement le long de cette tige. On l'abandonne de O, sans vitesse initiale, au moment où la tige est verticale et dirigée vers le bas. Étudier le mouvement de M sur la tige. Calculer la réaction et vérifier qu'elle est toujours dirigée dans le sens du mouvement de la tige. Quelle longueur doit avoir la tige pour que M la quitte avec une vitesse absolue horizontale et avant que la tige ne soit elle-même devenue horizontale? Montrer que l'angle que fait, à ce moment, la tige avec la verticale est indépendant de ω et calculer sa valeur à un grade près. Calculer la longueur de la tige, en supposant qu'elle fasse 600 tours par minute.

30. Une circonférence horizontale tourne autour de son centre, avec une vitesse constante. Un petit anneau pesant est enfilé sur cette circonférence. En le supposant primitivement au repos, déterminer le mouvement qui prend naissance, en tenant compte du frottement. Montrer qu'au bout d'un certain temps T, l'anneau demeure fixe sur la circonférence. Quelle est alors la valeur de la réaction? Calculer cette réaction pour une vitesse de 600 tours par minute et la comparer au poids de l'anneau, en supposant le rayon de la circonférence égal à 1^m. Calculer T dans la même hypothèse.

31. Un point pesant glisse avec frottement sur une circonférence, située dans un plan vertical. On l'abandonne sans vitesse initiale, à partir d'un point du diamètre horizontal. A quelle condition doit satisfaire le coefficient de frottement pour que le point arrive au point le plus bas de la circonférence?

(Le calcul de la vitesse en chaque point se ramène à l'intégration d'une équation différentielle linéaire. En tenant compte des conditions initiales, on détermine la constante et l'on calcule la vitesse au point le plus bas. Pour que cette vitesse soit réelle, il faut que

$$1 - 2f^2 - 3fe^{-f\pi} > 0,$$

ce qui exige que f soit inférieur à environ 0,7.)

32. Un point se meut sur une surface de révolution parfaitement polie, sous l'action d'une force rencontrant l'axe de la surface. Montrer que le mouvement obéit à la loi des aires et qu'on peut intégrer par quadratures si l'on suppose, en outre, que la force dérive d'une fonction de la distance du point à l'axe. (Prendre des coordonnées semi-polaires. On intègre comme dans le problème des forces centrales.)

33. Mouvement d'un point pesant sur une sphère parfaitement polie. (*Pendule sphérique.*)

34. Mouvement d'un point pesant sur un cylindre parfaitement poli, à génératrices verticales et de base quelconque. Démontrer que la trajectoire peut être obtenue en enroulant sur le cylindre la parabole qui serait décrite par le point, s'il était libre. (Projeter $\vec{f} = m.\vec{\gamma}$ sur la verticale et sur la tangente à la section droite. Si α désigne l'angle polaire de cette tangente dans xOy, on doit avoir

$$x'' \cos\alpha + y'' \sin\alpha = 0,$$

ce qui donne $u' = 0$, en posant $x' = u\cos\alpha$ et $y' = u\sin\alpha$.)

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DE LA DYNAMIQUE DU POINT.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Calculer l'influence de la diminution de la pesanteur avec l'altitude sur la portée d'un projectile dans le vide.*

La pesanteur est, comme on sait, un cas particulier de la gravitation universelle. Le poids d'un corps est inversement proportionnel au carré de sa distance r au centre de la Terre. Il en résulte que l'accélération de la pesanteur à l'altitude y est, en appelant R le rayon de la Terre,

$$\frac{g}{\left(1+\frac{y}{R}\right)^2}. \tag{1}$$

Cela posé, il s'agit de calculer l'accroissement de portée dX obtenu en tenant compte de cette propriété, pour un projectile lancé dans le vide, avec la vitesse v_0, inclinée de l'angle α sur l'horizon. Nous allons indiquer deux méthodes, dont les principes, très différents l'un de l'autre, peuvent être appliqués au calcul des altérations produites par des perturbations infiniment petites, dans un phénomène mécanique quelconque.

Méthode de l'accroissement fini. — Elle consiste à calculer la nouvelle portée et à en retrancher l'ancienne. Les équations différentielles du mouvement sont [1]

$$x''=0, \qquad y''=-\frac{g}{\left(1+\frac{y}{R}\right)^2}. \tag{2}$$

---

[1] Nous admettons que la verticale reste parallèle à elle-même, bien que l'erreur qui résulte de ce fait soit du même ordre que celle que nous nous proposons de corriger. Nous en tiendrons compte seulement dans la deuxième méthode, qui donne des calculs beaucoup plus simples.

La première nous donne

$$(3)\qquad x = v_0 t \cos\alpha.$$

La deuxième s'intègre au moyen de l'intégrale des forces vives [1] :

$$(4)\qquad y'^2 = \frac{2gR}{1+\frac{y}{R}} - a^2,$$

avec

$$(5)\qquad a^2 = 2gR - v_0^2 \sin^2\alpha.$$

L'équation (4) s'intègre par une quadrature, en séparant les variables. Pour éviter le radical, on est conduit à poser

$$(6)\qquad y' = a \operatorname{tang}\varphi, \qquad y = \frac{R}{a^2}(v_0^2 \sin^2\alpha - 2gR\sin^2\varphi).$$

En différentiant la seconde équation et portant dans la première, il vient

$$dt = -\frac{4gR^2}{a^3}\cos^2\varphi\, d\varphi;$$

d'où, en intégrant,

$$(7)\qquad t = -\frac{gR^2}{a^3}(2\varphi + \sin 2\varphi),$$

en prenant pour origine des temps l'instant où $\varphi = 0$, c'est-à-dire, en vertu de la première équation (6), l'instant du passage au sommet de la trajectoire [2]. Cette dernière courbe étant visiblement symétrique par rapport à la verticale du sommet, la durée de trajet T' est égale à $-2t_0$, t_0 désignant l'instant du départ du projectile, obtenu en remplaçant, dans (7), φ par la valeur déduite de

$$(8)\qquad a \operatorname{tang}\varphi = y'_0 = v_0 \sin\alpha.$$

---

(1) La fonction de forces est $\frac{mgR^2}{r} = \frac{mgR^2}{R+y}$.

(2) En annulant φ dans la deuxième équation (6), on a la flèche

$$F' = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g - \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{R}} = F\left(1+\frac{F}{R}\right),$$

en négligeant les puissances de $\frac{F}{R}$ supérieures à la première. On a donc $\frac{dF}{F} = \frac{F}{R}$.

On obtient ainsi, en tenant compte de (5),

$$(9) \qquad T' = \frac{2gR^2}{a^3}\left[2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{a}\right) + \frac{a v_0 \sin\alpha}{gR}\right].$$

Calculons le développement de cette quantité suivant les puissances croissantes du très petit rapport

$$(10) \qquad u = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2gR} = \frac{F}{R},$$

en nous arrêtant au terme du premier ordre. En appliquant les méthodes du Chapitre VIII du Tome I, on trouve, tous calculs faits,

$$(11) \qquad T' = T\left(1 + \frac{4}{3}u\right),$$

T désignant la durée de trajet non altérée. L'accroissement relatif $\frac{T'-T}{T} = \frac{dT}{T}$ est donc donné par la formule

$$(12) \qquad \frac{dT}{T} = \frac{4}{3}u = \frac{4}{3}\frac{F}{R}.$$

Comme, d'après (3), la portée est proportionnelle à la durée de trajet, le rapport $\frac{dX}{X}$ a la même valeur.

Méthode différentielle. — Soient (x, y) les coordonnées non altérées du point M au temps t et $(x + \delta x, y + \delta y)$ les coordonnées *au même instant*, quand on tient compte de la diminution de g et aussi de la convergence des verticales. Si l'on néglige les puissances de $\frac{x}{R}$ et de $\frac{y}{R}$ supérieures à la première, les composantes de la pesanteur sont [1]

$$-g\frac{x}{R}, \qquad -g\left(1 - \frac{2y}{R}\right).$$

Les composantes de la force au temps t ont donc subi les accroissements

$$(13) \qquad \delta X = -\frac{g v_0 t \cos\alpha}{R}, \qquad \delta Y = \frac{2g}{R}\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right),$$

---

[1] En réalité, on devrait mettre $x + \delta x$ et $y + \delta y$, au lieu de x et de y; mais, l'erreur commise est du même ordre que les termes négligés.

en supposant la masse égale à 1. Ce sont aussi les accroissements $\delta x''$ et $\delta y''$ subis par les composantes du vecteur accélération. Mais, l'accroissement de x'', par exemple, est évidemment égal à la dérivée seconde de l'accroissement de x; autrement dit, $\delta x'' = (\delta x)''$. Dès lors, il nous suffit d'intégrer deux fois les formules (13) par rapport au temps, pour avoir les altérations δx et δy au temps t. Les constantes d'intégration sont nulles, parce que $\delta x'$, $\delta y'$, δx, δy sont tous nuls pour $t = 0$, puisqu'on suppose qu'on ne change ni la vitesse ni la position initiales. On obtient ainsi

$$(14) \qquad \delta x = -\frac{g}{6R} v_0 \cos\alpha . t^3, \qquad \delta y = \frac{gt^3}{3R}\left(v_0 \sin\alpha - \frac{gt}{4}\right).$$

Ceci permettrait d'écrire les équations de la nouvelle trajectoire, qui est une courbe du quatrième degré, et de résoudre, d'une manière générale, n'importe quel problème concernant les altérations de la trajectoire en un point donné. Bornons-nous à calculer l'augmentation de portée. Au temps T (durée de trajet non perturbée), les formules (14) nous donnent, tous calculs faits,

$$(15) \qquad \delta x = -X \frac{4}{3} \frac{F}{R}, \qquad \delta y = \frac{4}{3} \frac{F}{R} T v_0 \sin\alpha.$$

Pour rejoindre le plan horizontal du point de départ, il faut descendre de δy sur la trajectoire. Comme l'angle de chute est sensiblement égal à α, ce déplacement vertical est accompagné d'un déplacement horizontal égal à

$$(16) \qquad dx = \delta y \cot\alpha = \frac{4}{3} \frac{F}{R} v_0 T \cos\alpha = X \frac{4}{3} \frac{F}{R}.$$

L'accroissement de portée est finalement $\delta x + dx = 0$. Donc, *si l'on tient compte à la fois de la décroissance de g et de la convergence des verticales, l'altération de la portée est nulle*, au second ordre près, en $\frac{X}{R}$. Si, au contraire, on ne tient compte que du premier phénomène, l'accroissement relatif de portée est $\frac{dx}{X} = \frac{4}{3} \frac{F}{R}$, conformément à ce que nous a donné la première méthode. Il est facile de voir que ce rapport est aussi l'accroissement relatif de la durée de trajet, que l'on tienne compte ou non de la convergence des verticales.

2. *Avec quelle vitesse faut-il lancer verticalement une sphère de* 10^{cm} *de diamètre, pour qu'elle monte à* 100^{m} *de haut? Calculer la durée de l'ascension, ainsi que la durée de la descente et la vitesse de*

chute à l'arrivée au sol. On supposera successivement que la sphère est en plomb, de densité 11,4, *puis en bois, de densité* 0,7. *On admettra que la résistance de l'air sur la sphère est* $0{,}0135 S v^2$, *avec les notations et unités indiquées au* n° 78.

Calcul de la vitesse initiale. — Appliquons la formule (18) du n° 79 :

$$100 = \frac{1}{c} \operatorname{Log} \frac{1}{\cos\varphi_0} = -\frac{1}{c} \operatorname{Log} \cos\varphi_0 ;$$

(1) $$\log \cos\varphi_0 = 0{,}434 \operatorname{Log} \cos\varphi_0 = -43{,}4\, c.$$

On a ensuite la vitesse v_0 demandée, au moyen de la formule (15) :

(2) $$v_0 = \sqrt{\frac{g}{c}} \operatorname{tang}\varphi_0 = \mathrm{V} \operatorname{tang}\varphi_0.$$

La durée d'ascension est donnée par la formule (17), soit

(3) $$\mathrm{T} = \frac{\varphi_0}{a}.$$

Calcul de la chute. — Nous appliquons les formules du mouvement descendant, en prenant $v_0 = 0$. Avec les notations du n° 80, nous avons $\varphi_0 = 0$. La formule (26) nous donne

$$100\, c = \operatorname{Log} \operatorname{ch} at$$

ou

(4) $$\log \operatorname{ch} at = 43{,}4\, c = -\log \cos\varphi_0.$$

On en tire la valeur de ch at, soit x. On a ensuite

(5) $$e^{at} = x + \sqrt{x^2 - 1} = y,$$

(6) $$t = \frac{\log y}{0{,}434\, a}.$$

La formule (24) donne enfin

(7) $$v = \mathrm{V} \operatorname{th}(at) = \mathrm{V} \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

Les formules (1) à (7) répondent à toutes les questions de l'énoncé. Il ne reste plus qu'à les appliquer avec les valeurs numériques données.

Prenons les unités M. K. S. Nous avons, en appelant d la densité de

la sphère,

$$m = \frac{\pi}{6}\frac{d}{g}, \qquad R = 0,0135\,\frac{\pi v^2}{400}, \qquad c = \frac{R}{mv^2} = \frac{0,000135\pi g}{4\frac{\pi}{6}d};$$

$$(8) \qquad c = \frac{0,000405}{2d} \times g = \frac{0,00198}{d}, \qquad V = \sqrt{\frac{2d}{0,000405}}, \qquad a = \frac{g}{V}.$$

Sphère en plomb. — On a $d = 11,4$. En portant dans (8), il vient

$$c = 0,000173; \qquad V = 237; \qquad a = 0,0414.$$

Puis, (1), (3), (2) nous donnent successivement

$$\log\cos\varphi_0 = -0,00750 = \bar{1},99250; \qquad \varphi_0 = 11^g,80 = \frac{11,8\times\pi}{200}\text{ radians};$$

$$T = \frac{11,8\times\pi}{8,28} = 4^s,48; \qquad v_0 = 237\times 0,188 = 44^m,5 \text{ par seconde.}$$

Les formules (4) à (7) donnent enfin

$$x = 1,0174; \qquad y = 1,0174 + \sqrt{2,02\times 0,0174} = 1,205;$$

$$t = \frac{0,0810}{0,434\times 0,0414} = 4^s,51;$$

$$v = 237\,\frac{0,205\times 2,205}{2,45} = 43^m,7 \text{ par seconde.}$$

Sphère en bois. — On a $d = 0,7$. Puis

$$c = 0,00282; \qquad V = 58,8; \qquad a = 0,167;$$

$$\log\cos\varphi_0 = -0,122 = \bar{1},878; \qquad \varphi_0 = 45^g,5;$$

$$T = \frac{45,5\times\pi}{33,4} = 4^s,27; \qquad v_0 = 58,8\times 0,868 = 51^m \text{ par seconde;}$$

$$x = 1,325; \qquad y = 2,20; \qquad t = 4^s,71; \qquad v = 38^m,6 \text{ par seconde.}$$

Remarques. — On voit que, dans les deux cas, $v < v_0$. Cela est bien conforme au théorème des forces vives. Le travail total de la pesanteur est nul; celui de la résistance de l'air est négatif; donc, la force vive a diminué.

Les vitesses sont, en chaque point du parcours, plus petites au retour qu'à l'aller; donc, *la durée de la chute doit être plus grande que celle de l'ascension*, ainsi que nous l'avons trouvé.

Ces différences entre les deux mouvements doivent être d'autant plus grandes que le coefficient balistique est plus grand; elles sont donc plus

accentuées pour la sphère en bois que pour la sphère en plomb; c'est encore ce que nous avons trouvé.

3. *Un fil élastique, de longueur naturelle l, est attaché à un point fixe A par une extrémité. L'autre extrémité supporte un point pesant M, tel que, lorsqu'il reste en équilibre, la longueur du fil est $2l$. On abandonne M, sans vitesse initiale, à partir d'une certaine position M_0. Déterminer cette position pour que M remonte jusqu'en A et y arrive sans vitesse initiale.* (É. N.; extrait de la composition écrite de 1907.)

Soient O la position d'équilibre et x l'abscisse de M à partir de ce point, Ox étant dirigé vers le bas. La force appliquée au point M est $-k(x+l)+mg$. Pour $x=0$, elle est nulle; donc $kl=mg$; d'où $k=\frac{mg}{l}$. La force est donc

$$X=-\frac{mg}{l}x.$$

Toutefois, *ceci n'est valable qu'autant que le fil reste tendu*, c'est-à-dire tant que $x>-l$. Si $x\leqq -l$, il ne reste plus que la pesanteur; le point est libre.

Dans la première hypothèse, nous avons une attraction du point O proportionnelle à la distance. Le mouvement qui prend naissance est donc un mouvement vibratoire simple (n° 87), dont il serait facile d'écrire l'équation. Mais, cela est inutile pour résoudre la question posée. Pour que le point arrive en A avec une vitesse nulle, il faut qu'il arrive au point B où la tension est nulle avec une vitesse v qui le fasse monter, en mouvement libre, à la hauteur l. D'après le théorème des forces vives, on doit avoir

$$v^2=2gl. \tag{1}$$

D'autre part, la force X dérive de la fonction $U=-\frac{mg}{2l}x^2$. En appliquant le théorème des forces vives entre M_0 et B, on a

$$v^2=-\frac{g}{l}(l^2-x_0^2). \tag{2}$$

En retranchant de (1), il vient

$$0=3l-\frac{x_0^2}{l}; \qquad x_0=l\sqrt{3}.$$

4. *Étudier le mouvement d'un pendule, en supposant qu'on imprime au point de suspension* A *un mouvement vibratoire simple, sur une horizontale du plan d'oscillation.*

Soient Oy et O l'axe et le centre de vibration du point A. Soient Ox la verticale descendante de O et Ax la verticale descendante de A. Soient $l =$ AM la longueur du pendule et $\theta = (\widehat{Ax, AM})$ son élongation. Il s'agit de déterminer la loi de variation de cette élongation en fonction du temps. Cela revient évidemment à *étudier le mouvement du pendule*, non pas par rapport aux axes fixes Oxy, mais *par rapport aux axes mobiles* Axy. Au moment où A commence à vibrer, la vitesse de M par rapport à Axy est brusquement diminuée de la vitesse absolue de A, laquelle est horizontale. Il arrive donc, en général, que la vitesse relative de M n'est plus perpendiculaire au fil et ce dernier se détend ou bien subit un choc. Pour éviter cette difficulté, nous supposerons qu'on fait commencer la vibration de A à un moment où sa vitesse est nulle et nous prendrons cet instant pour origine des temps. Dans ces conditions, si l'on pose $\overline{\text{OA}} = u$, on a une équation de la forme

$$u = lb \cos\beta t. \tag{1}$$

Soit, d'autre part,

$$\theta_1 = a\cos(\alpha t + \varphi) \tag{2}$$

l'équation du mouvement qu'avait le pendule immédiatement avant le temps zéro. Au temps zéro, les conditions initiales sont, aussi bien par rapport aux axes mobiles que par rapport aux axes fixes,

$$\theta_0 = a\cos\varphi, \qquad \theta'_0 = -a\alpha\sin\varphi. \tag{3}$$

Rappelons enfin que la constante α est liée à la longueur du pendule par la formule (n° 84)

$$g = l\alpha^2. \tag{4}$$

Cela posé, nous allons chercher l'équation différentielle du mouvement de M par rapport aux axes mobiles Axy. La force relative totale qui lui est appliquée comprend le poids, de composantes $(mg, 0)$; la force d'entraînement (n° 48), de composantes $(0, -mu'')$, et la tension du fil. Pour éliminer celle-ci, appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à A (n° 59). Si (x, y) sont les coordonnées de M, le moment résultant des forces précédentes est

$$x(-mu'') - y(mg) = -m(gy + xu'').$$

D'autre part, le moment cinétique est $ml^2\theta'$. En écrivant que sa dérivée est égale au moment résultant précédent, on obtient l'équation

$$l^2\theta'' = -gy - xu''$$

ou, en remplaçant x par $l\cos\theta$, y par $l\sin\theta$ et u'' par $-lb\beta^2\cos\beta t$,

(5) $$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = b\beta^2\cos\theta\cos\beta t.$$

Telle est l'équation rigoureuse du mouvement. Si nous nous bornons à l'hypothèse des *petites oscillations*, elle se simplifie :

(6) $$\theta'' + \alpha^2\theta = b\beta^2\cos\beta t.$$

On retombe sur le problème étudié au n° 90, dans le cas où l'amortissement est nul. L'intégrale générale se calcule par la méthode indiquée au n° 198 du Tome I; les constantes d'intégration se déterminent ensuite au moyen des conditions initiales (3). On trouve ainsi, tous calculs faits,

(7) $$\theta = a\cos(\alpha t + \varphi) + b\frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}(\cos\alpha t - \cos\beta t), \qquad \text{si } \beta \neq \alpha;$$

(8) $$\theta = a\cos(\alpha t + \varphi) + \frac{b\alpha t}{2}\sin\alpha t, \qquad \text{si } \beta = \alpha.$$

Interprétation des résultats. — La discussion complète est fort compliquée. Nous nous bornerons à examiner les cas particuliers qui donnent des résultats intéressants.

Voyons d'abord *s'il est possible d'obtenir un mouvement vibratoire simple.* C'est impossible avec l'équation (8), car le terme non périodique ne peut pas s'annuler. Avec l'équation (7), le terme en $\cos\beta t$ ne pouvant disparaître, il faut annuler les coefficients de $\cos\alpha t$ et $\sin\alpha t$. On est ainsi conduit à la solution suivante :

(9) $$\varphi = 0, \qquad a = b\frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \qquad \text{si } \beta < \alpha;$$

(10) $$\varphi = \pi, \qquad a = b\frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}, \qquad \text{si } \beta > \alpha.$$

Dans les deux cas, on a

(11) $$\theta = a\cos(\beta t + \varphi).$$

Autrement dit, *l'oscillation* (2) *continue avec la même amplitude et la même phase initiale;* seule, la période est changée; *ce n'est plus la période propre du pendule, mais la période de* A.

On aboutit à une interprétation très simple du phénomène en faisant la remarque suivante. Les mouvements absolus de tous les points de AM sont des mouvements vibratoires simples, ayant des amplitudes diverses; on est dès lors conduit à se demander si cette amplitude ne s'annule pas pour l'un de ces points, auquel cas ce point serait fixe. Faisons le calcul, en introduisant, pour plus de commodité, la longueur l' du pendule dont la fréquence serait celle de A, soit $l' = \frac{g}{\beta^2}$; de sorte que la formule (9) s'écrit

$$a = b \frac{l}{l' - l}. \tag{12}$$

La droite AM étant orientée de A vers M, soit le point P défini par $\overline{AP} = r$. Son ordonnée absolue est

$$y = u + r\theta = (lb + ra) \cos \beta t.$$

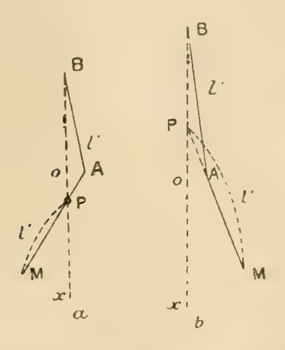
Elle est nulle quel que soit t, si $lb + ra = 0$, ou en tenant compte de (12), si $r = l - l'$, ou encore si $\overline{PM} = l'$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que le point P du fil (ou de son prolongement) qui se trouve à la distance l' de M demeure fixe. Dès lors, *tout se passe comme si l'on avait affaire à un pendule ordinaire suspendu par le point* P au lieu d'être suspendu par le point A. Cette interprétation nous indique tout de suite comment il faut s'y prendre pour réaliser les conditions initiales donnant lieu à ce mouvement. On doit abandonner M sans vitesse initiale, à partir d'une position M_0 telle que la droite $A_0 M_0$ rencontre la verticale Ox en un point P situé à la distance l' de M_0. On peut aisément faire l'expérience, en réalisant le mouvement de A au moyen d'un pendule BA de longueur l', la masse de A étant choisie beaucoup plus grande que celle de M, afin que la tension du fil AM soit négligeable vis-à-vis du poids de A et n'ait aucune répercussion sensible sur le mouvement de ce pendule. On abandonne alors les deux pendules sans vitesses initiales dans la position indiquée sur la figure 19. La figure (a) correspond aux équations (10) (angle de décalage égal à π) et la figure (b) aux équations (9) (décalage nul).

Ce cas particulier étant mis de côté, revenons au *cas général*. Si la fréquence de A diffère de la fréquence propre du pendule, le mouvement résulte de la *superposition de deux vibrations de périodes différentes*. Il peut être très compliqué et sa discussion générale serait inextricable. Par contre, nous avons envisagé, au n° 25, le cas particulier où les périodes sont très voisines, qui donne naissance à l'intéressant phéno-

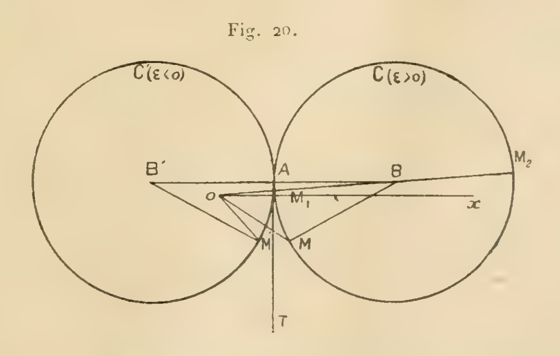
mène des *battements*. Si l'on pose $\beta = \alpha + \varepsilon$, les trois termes de la formule (7) se représentent, au moyen de la règle de Fresnel, par les

Fig. 19.



vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (de longueur a et d'angle polaire φ), $\overrightarrow{AB}$ $\left(\text{parallèle à } Ox \text{ et de mesure algébrique } c = b\dfrac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}\right)$ et $\overrightarrow{BM}$ (déduit de $\overrightarrow{BA}$ par la rotation εt). Le point M décrit le cercle C, de centre B et de rayon BA. Il part de A et tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif, suivant que ε est positif ou négatif. La figure 20 montre que, dans tous les cas, il commence par aller vers le bas.

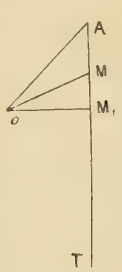
Fig. 20.



A chaque instant, l'amplitude de l'oscillation du pendule est représentée par la distance OM. Elle varie périodiquement entre le minimum OM_1 et le maximum OM_2, avec une fréquence égale à la différence des fréquences de A et du pendule. Par exemple, si $a = 0$, c'est-à-dire si le pendule part du repos, O est en A, ainsi que M_1, M_2 étant le point diamétralement opposé. L'amplitude oscille entre o et $2c$.

Ceci suppose toutefois que le rayon du cercle C est assez petit pour que l'amplitude maximum puisse encore être confondue avec son sinus, de manière que le passage de (5) à (6) soit toujours légitime. Ce rayon est sensiblement égal à $\frac{b\alpha}{2\varepsilon}$. On voit qu'il augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro. A la limite, le cercle C se confond avec la tangente AT en A, qui est décrite vers le bas, avec la vitesse $\frac{b\alpha}{2}$ (*fig.* 21); on se trouve alors dans le cas de l'équation (8).

Fig. 21.



Si $0 < \varphi < \pi$, c'est-à-dire si le pendule est, au temps zéro, en avance de moins d'une demi-période sur le point de suspension, l'amplitude commence par diminuer, passe par le minimum OM_1, puis augmente indéfiniment ([1]).

Si, au contraire, $0 > \varphi > -\pi$, c'est-à-dire si le pendule est en retard de moins d'une demi-période sur le point de suspension, l'amplitude ne cesse d'augmenter.

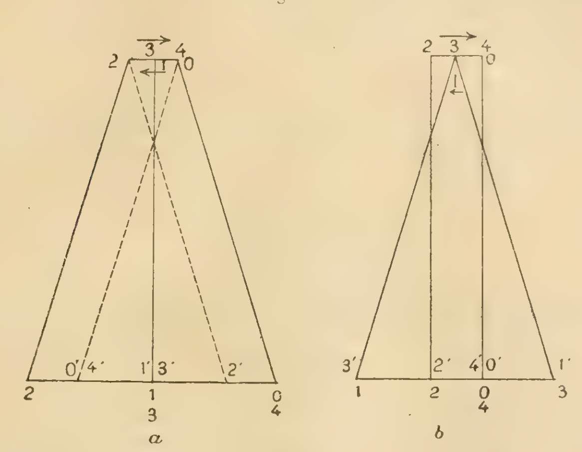
Lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le pendule est en avance d'un quart de période, la décroissance atteint son maximum de rapidité et l'amplitude passe par la valeur o. Au contraire, si le pendule est en retard d'un quart de période, l'amplitude augmente immédiatement, avec le maximum de rapidité.

Lorsque $\varphi = 0$ ou π, c'est-à-dire lorsque le pendule est en avance de zéro ou une demi-période, l'amplitude reste sensiblement constante pendant le début du mouvement. Toutes ces conclusions sont évidentes sur la figure 21.

([1]) Bien entendu, elle ne devient pas infinie, puisque la théorie ne s'applique plus dès que les oscillations ne sont plus très petites.

On peut s'en rendre compte intuitivement de la manière suivante. D'une manière générale, on conçoit que l'amplitude tend à diminuer quand le point de suspension va vers la verticale qui passe par la position actuelle du point M, puisque cela rapproche le pendule de sa position d'équilibre. L'amplitude tend, au contraire à augmenter, quand le point A s'éloigne de la verticale qui passe par la position actuelle de M. Cela posé, il suffit de regarder les figures 22, où l'on a marqué les positions

Fig. 22.



du pendule aux extrémités des quatre quarts de la période. La figure (a) montre qu'il y a augmentation d'amplitude pendant le premier et le troisième quart et diminution dans le deuxième et le quatrième quart, lorsque les deux mouvements n'ont aucun décalage (chiffres non accentués pour les positions de M); il y a diminution pendant le premier et le troisième quart, et augmentation pendant le deuxième et le quatrième, lorsque le décalage est d'une demi-période (chiffres accentués); dans les deux cas, les effets se compensent. Sur la figure (b), au contraire, on voit qu'il y a toujours diminution, si le pendule est en avance d'un quart de période (chiffres non accentués) et toujours augmentation si le pendule est en retard d'un quart de période.

Il est aisé de vérifier tout ceci expérimentalement au moyen des deux pendules dont il a été question plus haut; il suffit de leur donner la même longueur, en imprimant au pendule supérieur une oscillation extrêmement faible. En leur donnant des longueurs légèrement différentes, on obtient des battements.

5. *Calculer le demi-grand axe, l'excentricité et la durée de révolu-*

tion de la planète Mars, sachant qu'à une certaine époque, elle se trouve à la distance 1,5993 *du Soleil et qu'elle a une vitesse égale à* 4,8443 *et faisant un angle de* 85° 22′ *avec le rayon vecteur. On a pris pour unité de longueur le demi-grand axe de l'orbite terrestre et pour unité de temps l'année julienne.*

Commençons par déterminer la constante k du n° 93. Si l'on applique la formule (90) à la Terre, on doit faire $a = 1$ et $T = 1$; on a donc, dans le système d'unités de l'énoncé,

(1) $$k = 4\pi^2.$$

Nous avons ensuite

(2) $$C = r_0 v_0 \sin V = 1,5993 \times 4,8443 \times \sin 85^\circ 22'.$$

On trouve

(3) $$\log C = 0,88773.$$

Puis, en appliquant la formule (87), on trouve, en tenant compte de (1),

(4) $$-h = 25,918.$$

Pour faciliter les calculs, posons $e = \sin\varphi$. On en déduit

$$b = a\cos\varphi, \qquad p = a\cos^2\varphi.$$

En portant dans les formules (86), il vient

(5) $$C^2 = ka\cos^2\varphi, \qquad -h = \frac{k}{a}.$$

La deuxième nous donne immédiatement a :

$$a = 1,5232.$$

En portant dans la première, on calcule $\varphi = 5^\circ 15'$, puis

$$e = \sin\varphi = 0,0915.$$

Enfin, la formule (89) nous donne

$$T = \frac{2\pi a^2 \cos\varphi}{C},$$

en années juliennes, donc

$$\frac{2\pi a^2 \cos\varphi \times 365,25}{C},$$

en jours moyens. On trouve

$$T = 686,65.$$

On aurait pu aussi calculer ce nombre, en appliquant la troisième loi de Képler :

$$T = 365,25 \times (1,5232)^{\frac{3}{2}}.$$

Les valeurs exactes des éléments que nous venons de calculer sont

$$a = 1,5237; \qquad e = 0,0933; \qquad T = 686,98.$$

Les différences sont assez faibles et proviennent de ce que la théorie du nº 93, qui nous a servi, n'est qu'une théorie approchée.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer le tableau des portées, des durées de trajet et des flèches pour un projectile lancé dans le vide avec les vitesses de 10^m, 100^m, 500^m, 1000^m, 1500^m par seconde et sous les angles 5°, 15°, 25°, 35° et 45°.

2. Calculer l'influence de la décroissance de g et de la convergence des verticales sur les flèches et durées de trajet des trajectoires précédentes. (*Cf.* Exercice résolu nº 1.)

3. Au nº 76, nous avons appelé point de chute d'une trajectoire le point de rencontre de cette courbe avec le plan horizontal H mené par le point de départ O. En réalité, la rencontre avec la Terre, supposée sphérique, se fait en un point B un peu plus éloigné. Ce point se projette en B′ sur H. Calculer l'accroissement de portée AB′. Appliquer aux trajectoires de l'Exercice nº 1.

4. Établir la formule qui donne le nombre de minutes dont il faut augmenter l'angle de tir pour augmenter la portée de 100^m. Appliquer aux trajectoires du nº 1.

5. Calculer l'augmentation de portée qui résulte d'un accroissement relatif de vitesse initiale $\frac{dv_0}{v_0} = \frac{1}{100}$; calculer également la correction d'angle de tir, en minutes, qui annule l'effet de cet accroissement. Appliquer aux trajectoires du nº 1.

6. Calculer la correction qu'il faut faire subir à l'angle de tir, quand l'objectif A se trouve à une altitude légèrement différente de celle de O. Évaluer le rapport de cette correction à l'*angle de site*, c'est-à-dire à l'angle que fait la droite OA avec le plan horizontal. Montrer que, pour les petites portées, ce rapport est sensiblement égal à 1, de sorte qu'il suffit de relever le canon d'un angle égal à l'angle de site (principe de la *rigidité de la trajectoire*). Calculer l'erreur commise sur l'angle de tir, quand on fait cette approximation (*correction complémentaire de site*).

(Dans les trois exercices précédents, assimiler tous les petits accroissements à des différentielles.)

7. Démontrer que le point de contact d'une trajectoire avec la parabole de sûreté se trouve sur la droite symétrique de la verticale Oy par rapport à la tangente en O.

8. Calculer les équations du mouvement d'un point pesant dans le vide, en prenant l'axe des x suivant la vitesse initiale et l'axe des y vertical.

9. Calculer avec quelle vitesse il faudrait lancer verticalement un projectile pour qu'il ne retombe pas sur la Terre, en supposant qu'on puisse négliger la résistance de l'air. Quelle énergie faudrait-il dépenser pour cela, si le projectile pesait une tonne? Quelle serait effectivement la résistance que l'air exercerait sur le projectile à son départ, en supposant que l'on puisse appliquer la formule (10) du n° 78, avec $S = 4$ et $k = 0{,}02$?

[Appliquer les formules (4) et (5) de l'Exercice résolu n° 1; il faut que a^2 soit négatif. On trouve que la vitesse doit dépasser $11^{\text{km}},170$ par seconde, en prenant $R = 6370^{\text{km}}$. L'énergie à fournir doit être, en kilojoules, au moins égale à gR, soit

$$9{,}81 \times 6370000 = 62{,}4 \times 10^6,$$

ou, en kilogrammètres,

$$1000\,R = 6{,}37 \times 10^9.$$

Un moteur de 10000 chevaux mettrait environ 3 heures pour fournir cette énergie. La résistance de l'air au départ serait de $0{,}16\,gR = 10^7$ kilogrammes-poids, soit 10000 fois le poids du projectile. La pression moyenne par centimètre carré serait de 250^{kg}.]

10. On abandonne une sphère de 10^{cm} de diamètre, sans vitesse initiale, du haut de la Tour Eiffel. Construire les diagrammes des espaces et des

vitesses. Calculer la durée de chute et la vitesse au sol. Calculer, en fonction du chemin parcouru, le rapport de l'accélération de la sphère à l'accélération de la pesanteur. On supposera successivement que la sphère est en plomb (densité 11,4), puis en liège (densité 0,24). On adoptera la loi de résistance de l'air donnée dans l'Exercice résolu n° 2.

11. Que devient le coefficient balistique d'un corps solide quand on le remplace par un corps solide homothétique, en supposant que le coefficient k du n° 78 reste le même? Même question, quand on change le poids, sans changer les dimensions extérieures.

12. On reprend les données de l'Exercice résolu n° 2. On suppose que le diamètre de la sphère soit 101^{mm} et que la densité de l'air ait diminué de $\frac{1}{80}$ de sa valeur. Calculer ce que deviennent tous les résultats numériques obtenus, en supposant que la résistance de l'air est proportionnelle à sa densité. (Différentier les formules.)

13. Calculer les équations du mouvement d'un projectile dans l'air, en supposant la résistance proportionnelle au carré de la vitesse et les conditions initiales quelconques.

[Écrire les équations intrinsèques (n° 58) en introduisant la vitesse v et l'inclinaison τ de cette vitesse sur le plan horizontal. En remplaçant le rayon de courbure par $\frac{v\,dt}{d\tau}$, puis éliminant dt entre les deux équations, on arrive à l'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{dv}{d\tau} = v \operatorname{tang} \tau + \frac{cv^3}{g \cos \tau},$$

qui est une équation de Bernoulli (t. I, n° 192). On a ensuite t, x, y par des quadratures, en fonction de τ.]

14. Un cycliste, du poids total de 80^{kg}, se propose de franchir une piste ayant la forme d'une spire d'hélice, de pas assez faible pour pouvoir être assimilée à une circonférence, de 6^m de diamètre et située dans un plan vertical. A cet effet, il se laisse descendre sur une piste rectiligne, inclinée à 45° et se raccordant avec la piste hélicoïdale. De quelle hauteur doit-il partir pour être sûr de franchir la piste? On fera successivement le calcul dans les deux hypothèses suivantes :

1° On néglige les résistances passives et l'on calcule la hauteur strictement minimum;

2° On s'arrange pour que la pression du cycliste sur la piste, au point le plus haut, soit la même que sur une piste rectiligne horizontale. En

outre, on admet que les résistances passives sont données par la formule (*cf.* Chap. V, Exercice résolu n° 2)

$$R = 0,004\,P + 0,0025\,v^2,$$

v étant la vitesse en kilomètres à l'heure et l'on prend pour valeur de cette vitesse la vitesse maximum qu'atteindrait le cycliste dans son parcours, s'il n'y avait pas de résistances.

(Dans le premier cas, le cycliste doit partir d'un point situé à une hauteur au-dessus du point culminant de la piste égale à la moitié du rayon. Pour le deuxième cas, la vitesse maximum à adopter est de 48^{km} à l'heure; ce qui donne une résistance de 6^{kg} environ. En appliquant le théorème des forces vives entre le point de départ et le point culminant, on trouve que la hauteur de départ doit être de 5^{m} au-dessus de ce dernier point.)

15. Lorsque le fil d'un pendule cesse d'être tendu, le point M, devenu libre, décrit une parabole. Démontrer que cette parabole admet comme cercle osculateur le cercle primitivement décrit par M. Construire le point où le fil se tend de nouveau. (Appliquer la deuxième équation intrinsèque. Pour le point de rencontre de la parabole et du cercle, *voir* t. II, n° 332.)

16. Pour calculer la période d'un pendule, on part de la formule (46) du n° 84 et l'on fait le changement de variable : $\sin\frac{\varphi}{2} = ku$, en posant $k = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot$ Développer la quantité sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de k^2, en appliquant la formule du binome; intégrer ensuite terme à terme. On obtient ainsi le développement de T suivant les puissances de $\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot$

17. Étudier les petites oscillations d'un pendule, en supposant qu'il est soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse.

18. Étudier le mouvement d'un point pesant sur un cercle parfaitement poli, dont le plan fait l'angle i avec le plan horizontal.

19. Un pendule effectue de petites oscillations. A chaque passage dans un sens déterminé, à une certaine position M, on lui communique une petite impulsion, qui a pour effet d'accroître brusquement sa vitesse angulaire d'une quantité très petite ε. Calculer l'augmentation algébrique de la période T du pendule, qui résulte de ce dispositif. Montrer que

cette augmentation est nulle si M est la position d'équilibre. Elle est également nulle si l'on produit des impulsions égales, mais changeant alternativement de sens, ou bien des impulsions identiques et de même sens en deux points M et M′ symétriques par rapport à la position d'équilibre. [Si θ et θ' sont l'élongation et la vitesse angulaire en M, l'amplitude et la phase sont données par

$$\theta = a \sin\varphi, \qquad \theta' = a\omega \cos\varphi, \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Le choc fait varier brusquement a et φ de da et $d\varphi$, tels que $d\theta = 0$, $d\theta' = \varepsilon$; d'où l'on peut tirer $d\varphi$. D'autre part, le pendule repasse par la verticale dans le sens positif, lorsque $\varphi = 2\pi$. L'accroissement continu de la phase est donc $2\pi - d\varphi$ et le temps correspondant égale

$$\frac{2\pi - d\varphi}{\omega} = \mathrm{T} - \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Donc,

$$d\mathrm{T} = -\frac{d\varphi}{\omega} = \frac{\varepsilon\theta}{a^2\omega^2}.$$

Ce problème trouve une application dans l'*échappement* des horloges.]

20. Au moment où un pendule passe par une certaine position M, on fait varier brusquement sa longueur d'une petite quantité dl. En supposant que la vitesse tangentielle du point pesant ne soit pas modifiée par cette opération, calculer la variation brusque que subit la vitesse angulaire. En déduire la variation d'amplitude de l'oscillation. Montrer que cette variation est maximum, si M est la position d'équilibre, et qu'elle est nulle, si M est une position d'élongation maximum. Que se passe-t-il si l'on raccourcit le pendule à chaque passage à la verticale, en lui rétablissant sa longueur au prochain maximum d'élongation?

(On a $\frac{d\theta'}{\theta'} = -\frac{dl}{l}$. On calcule da en se servant des équations de l'exercice précédent et l'on trouve $\frac{da}{a} = -\frac{dl}{l}\cos^2\varphi$; d'où résultent les propriétés de l'énoncé, qui donnent le schéma de la théorie de l'*escarpolette*.)

21. Lorsqu'on lance un pendule M à partir d'un point voisin du point le plus bas P et avec une faible vitesse initiale, mais de direction quelconque, il décrit une courbe tracée sur la sphère de centre O et de rayon l (*pendule sphérique*), qui s'écarte très peu de P et peut être considérée

comme située dans le plan tangent en ce point. On appelle (x, y) les coordonnées de M par rapport à deux axes rectangulaires de ce plan issus du point P. Former les équations différentielles approchées auxquelles satisfont ces coordonnées, considérées comme infiniment petites. Montrer que le mouvement du point M est sensiblement une vibration elliptique. $\Big($La tension du fil est égale à mg au second ordre près. Ses projections sur Px et Py sont $-mg\frac{x}{l}$ et $-mg\frac{y}{l}$.$\Big)$

22. Le point de suspension A du pendule précédent est soumis à un mouvement vibratoire elliptique. Étudier les petites oscillations. (*Cf.* Exercice résolu n° 4. On obtient des résultats analogues, en étudiant le mouvement par rapport à des axes entraînés par le point de suspension et procédant comme il est indiqué dans l'Exercice 21. On peut toujours choisir les conditions initiales de manière que M effectue une vibration elliptique homothétique et synchrone à celle de A. Lorsque les deux périodes sont voisines, on a le battement des vibrations elliptiques.)

23. On considère deux plans inclinés A et A′, se coupant suivant une horizontale H et faisant respectivement les angles i et i' avec le plan horizontal. Un point B, de poids P, peut glisser sur A, avec le coefficient de frottement f; de même, un point B′, de poids P′, peut glisser sur A′, avec le coefficient de frottement f'. Les deux points sont reliés par une corde, qui passe sur une poulie, disposée sur l'horizontale H, de manière que les deux brins de la corde soient respectivement parallèles aux lignes de plus grande pente des deux plans. Étudier les mouvements possibles du système. (Écrire séparément les mouvements des deux points, en introduisant la tension de la corde et éliminer ensuite cette tension.)

24. Un point, de poids P, se déplace sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, sous l'action d'une force constamment parallèle à cette ligne. Démontrer que le travail absorbé par le frottement est égal au produit de fP par la projection horizontale du chemin parcouru. Démontrer qu'on a sensiblement la même propriété si le point décrit une ligne quelconque, située dans un plan vertical, avec une vitesse constamment très faible. (Dans le cas de la trajectoire courbe, il faut que la vitesse soit assez faible pour que l'accélération normale soit négligeable vis-à-vis de g.)

25. Étudier le mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, en supposant que la vitesse initiale n'est pas dirigée suivant une ligne de plus grande pente et en tenant compte du frottement. (Écrire les équa-

tions intrinsèques du mouvement, en introduisant l'angle polaire α de la vitesse v. Puis, éliminer le temps. Tout s'intègre par des quadratures très simples. *Cf.* Exercice n° 13.)

26. Appliquer les résultats de l'exercice précédent avec les données suivantes : $i = 10°$, $f = 0,5$. Calculer la durée T du mouvement et les coordonnées du point d'arrêt P, en fonction de l'angle φ que fait la vitesse initiale avec l'horizontale Ox du point de départ. Étudier les variations de T et construire le lieu de P, quand φ croît de o à π.

27. Un fil élastique, de longueur naturelle $2l$, est coupé en deux parties égales. On attache chacune de celles-ci à un point M, pesant 10^g; les deux autres bouts sont fixés à deux points A et B, distants de 1^m. La tension de chaque morceau de fil est $k\Delta r$, Δr désignant son accroissement de longueur au delà de l.

1° On place la droite AB verticalement, A au-dessus de B; M prend une position d'équilibre située à 60^{cm} au-dessous de A. Calculer k.

2° On place AB horizontalement; M prend une position d'équilibre située à 20^{cm} au-dessous de AB. Calculer l.

3° On place AB comme dans 1° et l'on abandonne M, sans vitesse initiale, à 40^{cm} au-dessous de A. Calculer la distance extrême à laquelle il descend et la durée de cette descente.

4° On place AB horizontalement et l'on abandonne M à partir du milieu de AB. Calculer la distance à laquelle il descend.

(*Certificat de Mécanique rationnelle*, épreuve pratique; *Clermont*, novembre 1911.)

28. Un point pesant M est lancé horizontalement à partir de la position A, avec la vitesse v_0. Il est attiré par un point O, situé à la distance a au-dessous de A, suivant la force $k.\overrightarrow{MO}$. Déterminer son mouvement.

29. Un point M, de masse 1, est attiré par O suivant la force $2\overrightarrow{MO}$. Il est soumis à une résistance opposée à la vitesse et égale à $3v$. On le lance à partir du point A(1,0) avec une vitesse égale à 2 et perpendiculaire à OA. Déterminer son mouvement. (*Cf.* Chap. I, Exercice proposé n° 8.) Calculer le travail absorbé par la résistance depuis le temps o jusqu'au temps t et construire le diagramme correspondant.

30. Un fil élastique est attaché au point fixe O. Son autre extrémité est attachée à un autre fil élastique, qui supporte, à son autre bout, un point pesant M. Étudier le mouvement de ce dernier, en supposant qu'on

l'abandonne, sans vitesse, à partir d'un point quelconque de la verticale du point O. Les longueurs naturelles et les coefficients d'élasticité des deux fils sont supposés quelconques.

31. Un ressort à boudin s'allonge de 45^{mm} quand on lui suspend un poids de 100^{kg}. Calculer l'énergie emmagasinée dans le ressort quand il est allongé de 10^{cm}.

32. Un ressort vertical s'allonge de $14^{mm},5$ sous l'action d'un poids M de 100^{g}. On l'allonge encore de 20^{mm}, en tirant sur M ; puis, on abandonne le tout. Un certain dispositif permet d'amortir les vibrations, au moyen d'une résistance proportionnelle à la vitesse. Calculer ce que doit être cette résistance pour une vitesse de 1^{m} par seconde, de manière que le décrément soit de $\frac{1}{10}$. Construire le diagramme des espaces, en supposant que la résistance est double de la résistance limite à partir de laquelle le mouvement devient apériodique.

33. On reprend le ressort précédent et l'on fait vibrer verticalement le point de suspension, avec une amplitude de 10^{mm} et une fréquence f. Calculer l'amplitude et le décalage de la vibration forcée que finit par prendre M. Construire les courbes représentatives de ces deux éléments, quand on fait varier f. Calculer, en particulier, le maximum d'amplitude et la valeur correspondante de f. On se placera successivement dans les deux hypothèses envisagées pour la résistance dans l'Exercice 32.

34. Un point M est attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance. On le lance, à partir d'un point donné A, avec une vitesse donnée v_0, dans une direction quelconque. Dans quelle région de l'espace doit-on placer un point P pour qu'il ne soit pas atteint par M? (Il y a un *ellipsoïde de sûreté.*)

35. Étudier le mouvement rectiligne d'un point sous l'influence de l'attraction newtonienne. (*Cf.* Exercice résolu n° 1.)

36. Dans le mouvement d'une planète, on appelle *anomalie vraie* l'angle $v = \theta - \theta_0$ de la formule (85) du n° 93. Démontrer qu'elle est liée à l'anomalie excentrique par la formule

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{u}{2},$$

en posant $e = \sin\varphi$.

37. Calculer le temps en fonction de l'anomalie vraie, dans le cas de l'orbite parabolique.

38. Avec quelle vitesse faudrait-il lancer un corps dans le sys-

tème solaire, pour que son orbite soit un cercle? [Annuler l'excentricité, donnée par la formule (86) du n° **93**. La vitesse doit être perpendiculaire au rayon vecteur et égale à $\sqrt{\frac{k}{r_0}}$.]

39. On donne le Tableau suivant des demi-grands axes, des excentricités et des masses des différentes planètes :

	Demi-grand axe.	Excentricité.	Masse.
Mercure.......	0,38710	0,20561	0,050
Vénus........	0,72333	0,0068164	0,817
Terre.........	1	0,016750	1
Mars.........	1,5237	0,093309	0,108
Jupiter........	5,2026	0,048335	318,36
Saturne.......	9,5547	0,055892	95,22
Uranus.......	19,218	0,046344	14,58
Neptune......	30,110	0,0089970	17,26
Soleil.........			333432

Calculer les vitesses maximum et minimum de chacune d'elles, ainsi que la durée de révolution. Calculer les limites entre lesquelles varie l'énergie cinétique de chaque planète, ainsi que les limites entre lesquelles reste certainement comprise l'énergie cinétique totale du système solaire. L'énergie potentielle étant prise égale à $-\frac{km}{r}$, calculer l'énergie totale pour chaque planète, ainsi que l'énergie totale de tout le système solaire. On calculera les énergies en kilojoules et en kilogrammètres. On calculera également le temps que mettrait un moteur de 10000 chevaux pour fournir chacune d'elles.

La valeur de la constante de la gravitation, en unités C. G. S., est $6,65 \times 10^{-8}$. La distance moyenne de la Terre au Soleil est

$$149,5 \times 10^6 \text{ km}.$$

40. Un point M est attiré par le point fixe O en raison inverse de OM^2. On le lance, à partir d'un point donné A, dans un plan donné et avec une vitesse v donnée, mais dans une direction variable.

1° Prouver que toutes les trajectoires ont même longueur d'axe focal.

2° Le lieu du deuxième foyer de la trajectoire est un cercle de centre A.

3° Construire, en s'appuyant sur ce qui précède, les trajectoires qui passent par un point donné. Montrer qu'il y a une ellipse de sûreté, admettant pour foyers O et A.

CHAPITRE VII.

NOTIONS SUR LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère un gaz, de masse totale* M, *enfermé dans une enceinte de volume* V, *comme constitué par un très grand nombre de molécules se déplaçant en ligne droite, avec une vitesse moyenne* u, *dans des directions diverses, uniformément réparties entre toutes les directions de l'espace. On admet que chaque molécule qui vient frapper la paroi limitant l'enceinte s'y réfléchit suivant les lois de la réflexion de la lumière et en gardant la même vitesse. Calculer la pression du gaz.*

Nous allons calculer la pression P exercée par le gaz sur une portion A de la paroi assez petite pour pouvoir être considérée comme plane et dont nous appellerons s la surface. Plaçons-nous d'abord dans le cas simple où *toutes les molécules auraient des vitesses parallèles et égales à* u. Soit m la masse d'une molécule. Quand elle se réfléchit, la composante tangentielle de sa vitesse ne change pas et sa composante normale change de signe. L'accroissement géométrique de sa quantité de mouvement a donc une projection nulle sur le plan de A et une projection sur la normale Ox égale au produit par $2m$ de la composante normale x de la vitesse après la réflexion. Pendant le temps dt, l'accroissement total de quantité de mouvement des molécules qui sont venues heurter A est $2nmx$, si n est le nombre de ces molécules. D'autre part, la réaction moyenne exercée, à chaque instant, sur l'ensemble des molécules qui touchent A, est une force dirigée suivant Ox et égale à Ps. Pendant le temps dt, elle produit un accroissement total des quantités de mouvement également dirigé suivant Ox [1] et égal à $Ps\,dt$ (nº 95). On a donc

$$(1) \qquad 2nmx = Ps\,dt.$$

[1] Ceci est bien conforme à l'hypothèse que la composante tangentielle de la vitesse de chaque molécule reste invariable pendant la réflexion.

D'autre part, les molécules qui sont venues frapper A pendant le temps dt se trouvaient, au début de ce temps, à l'intérieur d'un cylindre ayant pour base A et dont les génératrices, parallèles à la vitesse des molécules, avaient pour longueur commune $u\,dt$. Le volume de ce cylindre est $sx\,dt$, de sorte que, si D est la densité du gaz, on a

$$nm = \mathrm{D}sx\,dt. \tag{2}$$

En portant dans (1), il vient

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{D}x^2. \tag{3}$$

Revenons maintenant à l'hypothèse primitive où les molécules situées, à chaque instant, dans un volume donné, ont des vitesses uniformément réparties dans toutes les directions et de valeur moyenne u. Partageons l'intervalle (o, u) en très petits intervalles, par les nombres x_1, x_2, x_3, ..., x_{p-1}. Soient D_1, D_2, D_3, ..., D_p la masse des molécules contenues dans l'unité de volume et dont la composante de la vitesse suivant Ox est comprise dans le premier, le deuxième, le troisième, ..., le $p^{\text{ième}}$ de ces intervalles. Chacun de ces groupements de molécules fournit une pression partielle donnée par la formule (3). La pression totale cherchée est la somme de toutes ces pressions partielles [1], soit

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{D}_1x_1^2 + 2\mathrm{D}_2x_2^2 + \ldots + 2\mathrm{D}_pu^2. \tag{4}$$

Appelons d'autre part x'^2 la moyenne arithmétique des carrés des projections des vitesses des différentes molécules sur Ox. Si l'on remarque qu'il y a autant de molécules à vitesse positive que de molécules à vitesse négative, on a

$$x'^2 = \frac{(2\mathrm{D}_1x_1^2 + 2\mathrm{D}_2x_2^2 + \ldots 2\mathrm{D}_pu^2)}{\mathrm{D}}.$$

Dès lors, la formule (4) s'écrit

$$\mathrm{P} = \mathrm{D}x'^2. \tag{5}$$

Il nous reste à évaluer x'^2. Si v désigne la vitesse d'une molécule quelconque et x, y, z les composantes de cette vitesse suivant Ox et suivant deux autres axes formant un trièdre trirectangle avec le premier, on a

$$v^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{6}$$

---

(1) Car l'accroissement total de quantité de mouvement dû aux réflexions sur l'aire A pendant le temps dt est la somme des quantités de mouvement dues aux réflexions des molécules contenues dans chacun des groupes considérés.

Si nous prenons maintenant la moyenne de toutes les égalités analogues relatives à toutes les molécules de la masse gazeuse, et si nous observons que les moyennes des x^2, des y^2 et des z^2 doivent être égales, eu égard à la répartition uniforme des vitesses dans toutes les directions, nous obtenons

$$u^2 = 3x'^2. \tag{7}$$

Portant dans (5), il vient

$$P = \frac{Du^2}{3} \tag{8}$$

ou, en remplaçant D par $\frac{M}{V}$,

$$PV = \frac{M}{3}u^2. \tag{9}$$

Ceci est l'*équation caractéristique des gaz parfaits dans la théorie cinétique des gaz.*

2. Machine d'Atwood. — On sait que la machine d'Atwood se compose d'une poulie, sur laquelle passe un fil, supportant, à chaque extrémité, une masse M. Sur l'une de celles-ci, on pose une petite masse additionnelle m. Il s'agit de calculer l'accélération γ du mouvement qui prend naissance.

Première méthode. — Appliquons le *théorème du moment cinétique* par rapport à l'axe O de la poulie. Soit v la vitesse que prennent les masses au temps t. Le moment résultant de leurs quantités de mouvement est $R(2M+m)v$, en appelant R le rayon de la poulie et en négligeant le moment d'inertie de cette dernière, ainsi que la masse du fil. Les forces extérieures sont les poids des masses M et M + m et les réactions sur l'axe. Si nous négligeons les frottements dus à ces dernières, le moment résultant par rapport à l'axe est mgR. On a donc

$$R(2M+m)\frac{dv}{dt} = mgR; \tag{1}$$

d'où

$$\gamma = g\frac{m}{2M+m}. \tag{2}$$

Si l'on veut un résultat plus précis, il faut tenir compte du moment cinétique de la poulie et des frottements sur l'axe. Soit I le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe. Comme sa vitesse angulaire

est $\frac{v}{R}$, son moment cinétique est $\frac{I}{R}v$ et il faut ajouter $\frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$ au premier membre de (1).

Si nous supposons maintenant que l'axe est supporté par deux coussinets et si nous appelons f leur coefficient de frottement sur les tourillons, les forces de frottement ont une somme égale à $f(2M+m)g$, car les composantes normales des réactions ont une somme égale au poids total du système [1]. Leur moment résultant par rapport à l'axe est

$$f(2M+m)gr,$$

en appelant r le rayon des tourillons. Ce moment doit être retranché du second membre de (1). Cette équation devient, dès lors,

$$(3) \qquad \left[R(2M+m)+\frac{I}{R}\right]\frac{dv}{dt} = mgR - f(2M+m)gr.$$

On en tire

$$(4) \qquad \gamma = g\,\frac{m - f(2M+m)\dfrac{r}{R}}{2M+m+\dfrac{I}{R^2}}.$$

On sait que, dans la pratique, l'axe de la poulie ne repose pas sur des coussinets, mais sur de petits galets entre-croisés, dont chacun roule contre le tourillon avec lequel il est en contact. Ceci a pour effet de diminuer considérablement l'influence du frottement. On a encore la formule (4), mais avec une valeur beaucoup plus faible de f, qui fait intervenir le frottement de roulement de l'axe de la poulie sur les galets et le frottement de glissement des axes des galets sur leurs coussinets.

Quoi qu'il en soit, on trouve toujours une valeur constante pour l'accélération. Cette valeur peut être rendue très faible en prenant assez petit le rapport $\frac{m}{M}$. Cela permet d'utiliser la machine d'Atwood pour l'étude expérimentale du mouvement uniformément accéléré.

Deuxième méthode. — Employons le *théorème des forces vives*, en nous bornant à l'approximation qui nous a conduit à la formule (2). La force vive du système est $(2M+m)v^2$. Sa demi-différentielle est

$$(2M+m)v\,dv = (2M+m)v\gamma\,dt.$$

---

[1] Nous négligeons le poids de la poulie. En outre, nous supposons que le contact de chaque tourillon avec son coussinet a lieu suivant la génératrice la plus basse, ce qui n'est pas tout à fait exact (*cf.* n° 156).

Le travail élémentaire se réduit à celui du poids de la masse additionnelle, soit $mgv\,dt$. On a donc

$$(2M + m)\,v\gamma\,dt = mgv\,dt;$$

d'où l'on tire la formule (2).

Troisième méthode. — Appelons T la tension de chaque brin du fil [1]. Appliquons le théorème du centre de gravité séparément aux masses M et $M + m$. Nous avons

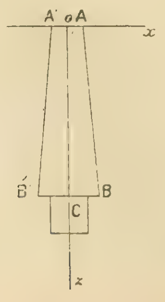
$$M\gamma = T - Mg, \qquad (M + m)\gamma = (M + m)g - T.$$

En additionnant membre à membre, de manière à éliminer T, on retrouve encore une fois la formule (2). Si l'on porte la valeur de γ dans l'une quelconque de ces équations, on peut en tirer la valeur de la tension

$$T = 2Mg\frac{M + m}{2M + m}.$$

3. Suspension bifilaire. — *Deux fils de même longueur* AB *et* A′B′ *sont attachés aux points fixes* A *et* A′, *situés sur une même horizontale. Ils supportent un corps solide* C, *auquel ils sont attachés en des points* B *et* B′ *choisis de telle manière que la droite* BB′ *est horizontale lorsque*

Fig. 23.



le système est en équilibre. On fait tourner C *d'un petit angle autour de la verticale qui passe par son centre de gravité et on l'abandonne sans vitesse initiale. Calculer la durée des oscillations qui prennent naissance.*

---

[1] Nous admettons que ces deux tensions sont égales. Cela revient à négliger le moment d'inertie de la poulie et les frottements.

APPLICATION. — $AA' = 10^{cm}$; $BB' = 20^{cm}$. *La distance de AA′ à BB′ quand il y a équilibre est de* 1^m. *On compte 72 oscillations simples dans une minute. Calculer le rayon de gyration de C par rapport à l'axe vertical qui passe par son centre de gravité.*

Lorsqu'il y a équilibre, la figure AA′B′B est un trapèze isoscèle et le centre de gravité G de C se trouve sur l'axe Oz de ce trapèze, qui est la verticale passant par le milieu O de AA′ (*cf.* Chap. IX, Exercice proposé n° 22). Pendant les oscillations, C tourne autour de Oz et subit, en même temps, une translation suivant cette droite. Calculons la relation qui existe entre la cote z de BB′ et l'angle θ dont a tourné C depuis sa position d'équilibre. Si nous prenons un axe Ox dirigé suivant A′A et un axe Oy perpendiculaire à zOx, les coordonnées du point B, par exemple, sont $(b\cos\theta, b\sin\theta, z)$, en posant $BB' = 2b$. Appelons, d'autre part, $2a$ la distance AA′ et l la distance qui sépare AA′ de BB′ dans la position d'équilibre. Écrivons que la distance AB n'a pas changé :

$$(1) \qquad l^2 + (b-a)^2 = z^2 + (b\cos\theta - a)^2 + b^2\sin^2\theta;$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad z^2 = l^2 - 2ab(1-\cos\theta).$$

Si l'on suppose θ petit, on peut prendre

$$z^2 = l^2 - ab\theta^2, \qquad z = l\left(1 - \frac{ab}{l^2}\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, en développant par la formule du binome et se limitant au terme en θ^2,

$$(3) \qquad z = l - \frac{ab}{2l}\theta^2.$$

Cela posé, appliquons le théorème des forces vives. La seule force qui travaille est le poids mg de C; il dérive de la fonction de force mgz, ou, en négligeant une constante additive, $U = -mg\dfrac{ab}{2l}\theta^2$. Calculons maintenant l'énergie cinétique. La vitesse de chaque point de C est la somme géométrique de la vitesse de translation $z' = -\dfrac{ab}{l}\theta\theta'$ et de la vitesse due à la rotation qui est égale à $r\theta'$, en appelant r la distance du point considéré à Oz. Comme ces vitesses sont rectangulaires, on a

$$(4) \qquad v^2 = \theta'^2\left[r^2 + \left(\frac{ab}{l}\right)^2\theta^2\right].$$

On pourrait en déduire l'expression exacte de l'énergie cinétique de C [1]. Mais, cela est inutile, car le second terme du crochet est négligeable vis-à-vis du premier, de sorte que l'on peut se borner à prendre l'énergie cinétique due à la rotation autour de Oz, soit $\frac{I}{2}\theta'^2$, en appelant I le moment d'inertie de C par rapport à Oz. Nous avons dès lors

$$(5) \qquad \frac{I}{2}\theta'^2 = -\frac{mgab}{2l}\theta^2 + h.$$

On pourrait intégrer par une quadrature. Mais, il est plus simple de se ramener à une équation linéaire à coefficients constants, en dérivant (5) par rapport à t et divisant par $2\theta'$; on trouve ainsi

$$(6) \qquad \theta'' + \frac{mgab}{Il}\theta = 0.$$

On aboutit à l'équation d'un mouvement vibratoire simple, dont on sait calculer la période. La durée d'une oscillation simple est

$$(7) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{Il}{mgab}}.$$

Si on la mesure expérimentalement, on peut en déduire I :

$$(8) \qquad I = \frac{mgab\,T^2}{\pi^2 l}.$$

Si K désigne le rayon de gyration, on a

$$(9) \qquad K = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{gab}{l}}.$$

Application numérique. — On a, en unités C. G. S.,

$$T = \frac{60}{72} = \frac{5}{6}, \qquad g = 981, \qquad a = 5, \qquad b = 10, \qquad l = 100.$$

En portant dans (9), on trouve $K = 5{,}88$, soit environ 59^{mm}.

4 [2]. *On considère le cycliste de l'Exercice résolu n° 2 du Chapitre V. Calculer la pression sur les pédales, la tension de la chaîne et la réac-*

---

[1] *Cf.* Exercices proposés nos 13 et 14.

[2] Cet exercice pourrait aussi bien être rattaché au Chapitre IX.

tion tangentielle de la route sur la roue arrière, dans les hypothèses suivantes :

1° *Le cycliste fait* 20^{km} *à l'heure, en palier.*

2° *Le cycliste fait* 10^{km} *à l'heure, dans une montée de* 5 *pour* 100.

3° *Le cycliste fait un démarrage, en palier, qui lui donnera une vitesse de* 30^{km} *à l'heure au bout de* 15 *secondes.*

On donne le développement : $5^m,50$, *le diamètre de la roue arrière :* $0^m,70$, *le diamètre du pignon de la roue arrière :* 7^{cm}, *la longueur des manivelles du pédalier :* 17^{cm}.

Établissons d'abord les formules générales. Appelons P le poids total du cycliste et de la machine; R la résistance à l'avancement, donnée par la formule (1) de l'exercice précité ; D le développement, a le rayon de la roue arrière, r le rayon du pignon de la roue arrière, r' le rayon du pignon de pédalier, l la longueur des manivelles, T la tension de la chaîne, Q la pression sur les pédales et F la réaction tangentielle de la route sur la jante de la roue arrière; enfin p la pente, comptée positivement quand le cycliste monte, v la vitesse et γ l'accélération. Toutes ces quantités sont évaluées dans le système M. K. S.

Pression sur les pédales. — Nous allons appliquer le théorème des forces vives. Si nous négligeons l'énergie cinétique due à la rotation des roues, des pédales, de la chaîne et aux mouvements des jambes, la force vive est $\frac{P}{g}v^2$; sa demi-différentielle est $\frac{P}{g}v\,dv = \frac{P}{g}v\gamma\,dt$. Évaluons maintenant le travail de toutes les forces appliquées au système. Nous avons d'abord la résistance R, qui donne le travail $-Rv\,dt$; puis, la composante tangentielle du poids P, qui est Pp et qui donne le travail $-Ppdt$; puis, les réactions de la route sur les deux roues, qui ne donnent aucun travail, tant qu'il n'y a pas dérapage, puisque la vitesse de chaque point de contact est nulle. Il ne nous reste plus que le travail des forces intérieures, que nous pouvons calculer en supposant la bicyclette immobile, puisque ce travail est indépendant du choix du trièdre de référence (n° 102). Nous avons d'abord les différents frottements intérieurs à la bicyclette, qui dépendent essentiellement de la qualité de la machine et qui sont compris, en gros, dans l'expression empirique de R. Il ne nous reste finalement que le travail musculaire du cycliste. Nous admettons que ce travail est tout entier employé à faire tourner les pédales [1]. Si

---

[1] Ce n'est pas toujours vrai dans la pratique, car les cyclistes qui ne savent pas pédaler dépensent de l'énergie en gestes et contractions musculaires inutiles. Cette énergie est employée, en partie, à entretenir des mouvements du tronc que nous avons

nous supposons, pour simplifier, que la pression Q est perpendiculaire à la manivelle, son travail élémentaire pendant le temps dt est $Q l\, d\theta$, $d\theta$ désignant l'angle dont a tourné cette manivelle. Or, pour une rotation de 2π, la bicyclette parcourt le chemin D; pour la rotation $d\theta$, elle parcourt $v\,dt$; on a donc

$$(1)\qquad d\theta = \frac{2\pi v\,dt}{D}.$$

Finalement, le théorème des forces vives nous donne l'équation

$$(2)\qquad \frac{P}{g} v\gamma\,dt = \left(\frac{2\pi Q l}{D} - Pp - R\right) v\,dt;$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad Q = \frac{D}{2\pi l}\left[P\left(p + \frac{\gamma}{g}\right) + R\right].$$

Tension de la chaîne. — Appliquons le théorème du moment cinétique au pédalier, en négligeant les variations de ce moment, qui est toujours petit. Le moment résultant des forces T et Q par rapport à l'axe doit être nul. On a donc

$$Q l = T r';$$

d'où

$$(4)\qquad T = \frac{Q l}{r'}.$$

Réaction sur la roue arrière. — Remarquons d'abord que la réaction tangentielle sur la roue avant est nulle, si l'on néglige les variations de son moment cinétique dans son mouvement autour de son centre de gravité; le théorème du n° 97 nous apprend, en effet, que le moment résultant des forces extérieures par rapport à son axe doit être nul, ce qui exige que la réaction de la route rencontre cet axe et, par conséquent, n'ait pas de composante tangentielle.

Cela posé, appliquons le théorème du centre de gravité à tout le système, en le projetant sur la route. Les forces extérieures ont pour projections $-R$, $-Pp$ et F. On a donc

$$\frac{P}{g}\gamma = F - R - Pp;$$

---

négligés tout à l'heure dans le calcul de l'énergie cinétique. Elle produit aussi des déformations élastiques du guidon et de la selle; elle donne de la chaleur, des mouvements vibratoires, etc.

d'où

$$F = P\left(p - \frac{\gamma}{g}\right) + R. \tag{5}$$

Si l'on rapproche cette formule de la formule (3), on voit que

$$Q = F\frac{D}{2\pi l}. \tag{6}$$

Cette formule peut s'établir directement, en appliquant le théorème des forces vives à la bicyclette considérée comme immobile. La force vive est nulle [1]. Il en est donc de même du travail élémentaire des forces appliquées à la bicyclette. Parmi ces forces, nous avons la pesanteur et les forces d'entraînement [2], qui ne travaillent pas. Nous avons ensuite le travail de la force Q, soit $Q l d\theta$, et celui de la force F, qui est, cette fois, $-F v dt$, car la vitesse d'entraînement du point de contact est $-v$, par rapport au cadre de la bicyclette. En annulant la somme de ces travaux et se servant de la formule (1), on obtient (6).

On peut aussi, en partant de F, calculer la tension de la chaîne. Il suffit d'appliquer le théorème du moment cinétique à la roue arrière. En négligeant les variations de ce moment, on doit écrire que le moment résultant de F et de la tension T appliquée au petit pignon est nul; cela donne

$$Fa = Tr;$$

d'où

$$T = F\frac{a}{r}. \tag{7}$$

Si l'on compare avec (4) et (6), on trouve que l'on doit avoir

$$D = 2\pi a\frac{r'}{r}; \tag{8}$$

ce qui est bien la formule qui donne le développement.

Applications numériques. — Nous avons $\frac{a}{r} = 10$; donc (7) devient

$$T = 10\,F. \tag{9}$$

---

(1) Nous négligeons toujours la force vive due à la rotation des roues.

(2) Il ne faut pas oublier que nous avons changé de trièdre de référence, l'accélération d'entraînement étant γ. Mais, les forces d'entraînement et de pesanteur donnent lieu au même travail que leur résultante, qui est appliquée au centre de gravité du système, lequel est immobile; donc, ce travail est bien nul.

Puis

$$\frac{D}{2\pi l} = \frac{5,5}{\pi \times 0,34} = 5,15;$$

donc (6) devient

$$(10) \qquad Q = 5,15\,F.$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer F dans les différentes hypothèses de l'énoncé et à appliquer, chaque fois, les formules ci-dessus.

1° On a $p = \gamma = 0$, $R = 1,8$; donc

$$F = 1,8, \qquad \text{puis} \qquad T = 18, \quad Q = 9,3.$$

2° On a $p = 0,05$, $\gamma = 0$, $R = 1,05$; donc

$$F = 5,05, \qquad T = 50,5, \qquad Q = 26.$$

3° On a $p = 0$, $\gamma = \frac{2}{3,6} = \frac{1}{1,8}$, $R = 0,8$; donc

$$F = \frac{80}{1,8 \times 9,81} + 0,8 = 5,3; \qquad T = 53, \qquad Q = 27.$$

Remarques. — La formule (6) nous montre que la pression sur les pédales est proportionnelle au développement; c'est pourquoi les très grands développements ne peuvent être employés pour monter de fortes pentes. La formule (7) nous montre que la tension de la chaîne est inversement proportionnelle au rayon du petit pignon; l'emploi de très petits pignons expose donc aux ruptures de chaîne.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Le tube d'un canon de 75 pèse 460^{kg}. Il tire un obus pesant $7^{kg},250$ à la vitesse de 535^{m} par seconde. Calculer la vitesse de recul du tube sur son affût. (Appliquer le théorème du centre de gravité au système formé par le tube et l'obus; ce centre de gravité reste immobile.)

2. Un navire de 5000^{t} tire un coup de canon dans le sens de sa marche. Le projectile pèse 340^{kg}; la vitesse initiale est de 800^{m} par seconde. De combien est diminuée la vitesse du navire?

3. Deux sphères, de masses respectives m et m', se meuvent sur Ox et se rencontrent avec les vitesses v et v'. Calculer leurs vitesses après le choc, en supposant que le rapport de leurs vitesses relatives après le

choc et avant le choc a une valeur donnée $-k$, k étant un nombre positif au plus égal à 1. Vérifier que la force vive perdue est dans le rapport $\frac{1-k}{1+k}$ avec la force vive due aux vitesses perdues.

[Si x et x' sont les vitesses après le choc, on a

$$x' - x = k(v - v') = kV.$$

D'autre part, le centre de gravité doit conserver la même vitesse ; on en déduit une seconde équation et l'on trouve

$$x = v - \frac{m'(k+1)V}{m+m'}, \qquad x' = v' + \frac{m(k+1)V}{m+m'}.$$

La force vive perdue pendant le choc est

$$P = \frac{mm'(1-k^2)V^2}{m+m'}.$$

La force vive due aux vitesses perdues est

$$Q = m(v-x)^2 + m'(v'-x')^2 = \frac{mm'(1+k)^2V^2}{m+m'}.$$

Lorsque $k=0$, on dit que *le choc est mou ;* lorsque $k=1$, on dit qu'il est *parfaitement élastique ;* dans ce dernier cas, il n'y a pas de perte de force vive.]

4. On donne un coup de marteau sur une pointe. La tête du marteau pèse 1^{kg}. Elle arrive sur la pointe avec une vitesse de 2^{m} par seconde et elle est arrêtée en $\frac{1}{500}$ de seconde. Calculer la valeur moyenne de la réaction exercée par le marteau sur la pointe. De combien s'enfonce la pointe, si l'on admet que la réaction demeure constante pendant toute la durée du choc? (La quantité de mouvement perdue par le marteau est égale à la réaction demandée multipliée par la durée du choc. On trouve 102^{kg}. Le chemin parcouru peut se déduire du théorème des forces vives; on trouve 2^{mm}.)

5. Un chariot empli de liquide est percé, à la base d'une de ses parois verticales, d'une petite ouverture, de surface s. La vitesse du jet par rapport au chariot est v, la densité du liquide est a. Calculer la réaction R exercée sur le chariot par le liquide. (Appliquer le théorème des quantités de mouvement à la masse liquide qui se trouve dans le chariot au temps t. Au temps $t+dt$, une masse $asv\,dt$ de ce liquide a pris la vitesse v, une masse égale a perdu la vitesse sensiblement nulle du niveau supérieur et le reste a gardé la même distribution de vitesses. On en

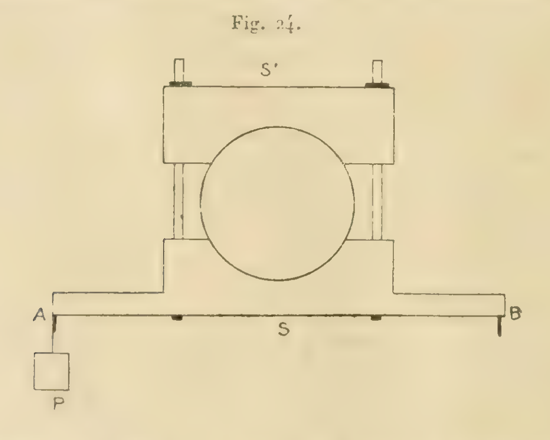
déduit l'accroissement de la quantité de mouvement et, en divisant par dt, la force $-R$.)

6. Deux poulies P et P′ sont montées sur le même axe et sont solidaires l'une de l'autre. Leurs rayons respectifs sont R et R′. Sur la première, s'enroule un fil, dont une extrémité est fixée à la poulie et dont l'autre extrémité supporte une masse m. Sur la seconde s'enroule de même, mais en sens inverse, un fil supportant une masse m'. Calculer l'accélération du système. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

7. On donne deux circonférences C et C′, de même axe A et de rayons respectifs R et $\frac{R}{2}$. Deux points M et M′, de même masse, se meuvent sans frottement, le premier sur C, le second sur C′. En outre, ils s'attirent proportionnellement à la distance MM′. Trouver leur mouvement, en supposant qu'on les abandonne tous deux sans vitesse initiale et dans une position quelconque. Calculer la durée des petites oscillations. (Le moment cinétique par rapport à A est nul. On en déduit $\beta = -4\alpha$, en appelant α et β les angles polaires de M et de M′ par rapport à des rayons parallèles, de direction convenablement choisie. On peut ensuite appliquer le théorème des forces vives, en remarquant qu'il y a une fonction de forces, qui, tous calculs faits, est proportionnelle à $\cos 5\alpha$. On a un mouvement pendulaire.)

8. Pour mesurer la puissance d'un moteur, on adapte à une poulie

Fig. 24.



calée sur l'arbre un frein (dit *frein de Prony*) constitué par deux sabots S et S′, que l'on peut serrer par des boulons les reliant l'un à l'autre. Le sabot inférieur S porte un bras AB muni de crochets à ses

deux extrémités. Le moteur étant au repos et les boulons n'étant pas serrés, le bras AB est en équilibre dans la position horizontale. On fait tourner le moteur à la vitesse de N tours par minute, le frein ayant subi, au préalable, un certain serrage. Puis, on suspend au crochet A un poids P tel que AB reste horizontal. Connaissant la distance $2l$ des deux crochets, calculer la puissance du moteur. Application numérique :

$$N = 436, \qquad l = 50^{cm}, \qquad P = 86^{kg}.$$

(Le moment résultant des forces de frottement est Pl. Pour l'application numérique, on trouve environ 26 chevaux.)

9. Un moteur de 40 chevaux tourne à la vitesse de 230 tours par minute. Le mouvement est transmis par une courroie s'enroulant sur une poulie de 50^{cm} de diamètre calée sur l'axe du moteur. Quelle doit être la largeur de la courroie si l'on veut que la tension par centimètre carré soit 40^{kg}? L'épaisseur de la courroie est de 7^{mm} et le rapport des tensions des deux brins est 2,2. (La plus forte tension est de 913^{kg}; la largeur doit être de 33^{cm}.)

10. La jante d'un volant a pour diamètre extérieur $2^m,20$ et pour diamètre intérieur 2^m. Son épaisseur est de 30^{cm}. Sa densité est 7,8. Il tourne à 130 tours par minute. Calculer son énergie cinétique. Au bout de combien de temps et de combien de tours s'arrêtera-t-il s'il est abandonné à lui même, en supposant que la seule résistance passive soit le frottement sur les coussinets. Le diamètre des tourillons est de 120^{mm} et leur coefficient de frottement sur les coussinets est 0,10.

11. On suppose que la bicyclette de l'Exercice résolu n° 4 descend une pente de 8 pour 100 et qu'elle a atteint sa vitesse limite. Le cycliste veut s'arrêter brusquement. Il exerce sur la jante de la roue arrière une pression de 50^{kg} avec un frein dont le coefficient de frottement est 0,25. Au bout de combien de temps et de combien de mètres sera-t-il arrêté? Même question, en supposant qu'il agit, en même temps et de la même manière, sur la roue avant. Quelle pression maximum peut-il exercer sur chacun de ses freins sans que les roues dérapent, en supposant que le centre de gravité du système tombe au tiers de la distance des deux roues, à partir de la roue arrière? On fera le calcul avec un coefficient de frottement de la roue sur le sol égal à 0,6 (sol sec), puis à 0,10 (sol boueux). Calculer, dans chaque cas, l'espace parcouru avant l'arrêt, en supposant un seul frein, puis deux freins. (Pour simplifier le calcul du temps d'arrêt, on pourra admettre que la vitesse V qui donne la résistance R est la moyenne entre les vitesses initiale et finale.)

12. Démontrer que le moment cinétique d'un système par rapport au point fixe O est égal au moment cinétique de son centre de gravité, où serait concentrée toute la masse, augmentée du moment cinétique par rapport à G, dans le mouvement autour de ce point (n° 97). (*Théorème de Kœnig*. Faire un changement de coordonnées et écrire les composantes de ces différents moments suivant les axes de référence.)

13. Démontrer un théorème analogue au précédent pour l'énergie cinétique.

14. On fait un changement de trièdre de référence. Démontrer que, si la vitesse relative de chaque point d'un système est perpendiculaire à sa vitesse d'entraînement, l'énergie cinétique absolue est la somme des énergies cinétiques relative et d'entraînement.

15. Calculer l'énergie cinétique d'un corps solide animé d'un mouvement hélicoïdal de pas p et de vitesse de translation v. (Appliquer les Exercices 13 ou 14.)

16. Un obus de 75, pesant $7^{kg},250$, est lancé avec la vitesse de 535^m par seconde par un canon dont les rayures sont inclinées de 7° sur les génératrices du tube. Calculer son énergie cinétique. Quelle serait la vitesse initiale si la même énergie était employée sur le même projectile, mais avec un canon lisse?

17. Un pendule est constitué par une sphère de 5^{cm} de diamètre, fixée à l'extrémité d'une tige de 1^m de long et de 2^{mm} de diamètre. Calculer la longueur du pendule synchrone.

18. Un métronome est un pendule composé, constitué par une tige supportant une grosse masse fixe située au-dessous de l'axe O de suspension et une petite masse mobile pouvant glisser le long de la tige, au-dessus de O. Soit x la distance de O au centre de gravité de la petite masse. Pour $x = 20^{mm}$, le métronome fait 208 oscillations simples par minute et, pour $x = 125^{mm}$, il en fait 40. Graduer le métronome.

$$\left(\text{La longueur du pendule synchrone est de la forme } \frac{a+x^2}{b-x}.\right)$$

19. On veut mesurer le rayon de gyration d'un corps solide de révolution par rapport à son axe. A cet effet, on le fixe dans un cadre rectangulaire ABCD, de telle manière que son axe coïncide avec le côté CD. Puis, on fait osciller le cadre autour de l'axe AB maintenu horizontal. On compte 100 oscillations en 108 secondes. On fait ensuite osciller le

cadre seul et l'on compte 100 oscillations en 74 secondes $\frac{1}{5}$. Calculer le rayon demandé, sachant que le cadre pèse 1500^{g}, le corps solide 228^{kg}, que le centre de gravité du cadre est à 47^{cm} de AB et enfin que $BC = 1^{m}$.

20. Démontrer que, dans un pendule composé, le frottement des couteaux sur les supports est sans influence sur la durée d'oscillation et ne fait que diminuer progressivement leur amplitude. (Si les oscillations sont petites, on peut admettre que le frottement exerce un couple constant. Ce couple a pour unique effet de déplacer la position d'équilibre, vers la gauche ou vers la droite, suivant le sens du mouvement.)

21. Un moteur de puissance P est muni d'un système amortisseur constitué par des ailettes qui donnent un couple résistant proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Étudier le mouvement du moteur, en supposant qu'il part du repos. Calculer sa vitesse limite. $\left(\text{Le couple moteur est de la forme } \frac{P}{\omega} - k\omega^2.\right)$

22. Un arbre vertical, supportant une charge d'une tonne, repose sur une crapaudine de 80^{mm} de diamètre. Il tourne à la vitesse de 150 tours par minute. Calculer la puissance absorbée par le frottement, sachant que le coefficient de frottement du pivot sur la crapaudine est 0,10. (On supposera que la pression sur la crapaudine est uniformément répartie et l'on calculera le moment des forces de frottement.)

23. Calculer le mouvement d'un cylindre de révolution homogène qui roule sur un plan incliné, ses génératrices étant horizontales, ou bien faisant l'angle φ avec les horizontales du plan. (Théorème des forces vives. Appliquer l'Exercice 13.)

24. Un disque plein homogène, de rayon r, roule à l'intérieur d'une circonférence, de rayon R et de plan vertical. Déterminer son mouvement; calculer la longueur du pendule synchrone. (Forces vives.)

25. Un fil rectiligne en acier, de longueur l et de rayon r, est encastré dans un étau à l'une de ses extrémités. A l'autre extrémité, il est encastré dans un corps solide S, qui pend librement au bout du fil. Si l'on impose à ce corps solide une rotation de l'angle θ autour de la verticale, la réaction du fil donne naissance à un couple dit *couple de torsion*, de sens inverse à la rotation et dont la valeur (en kg $\times$ mm) est $\frac{5500\pi r^4}{l}\theta$, en supposant l et r évalués en millimètres et θ en radians. Déterminer la loi

des oscillations que prend S si on l'abandonne sans vitesse initiale à partir d'une valeur quelconque de l'angle de torsion. Calculer la durée d'une oscillation. Application numérique :

$$l = 1^{\text{m}}, \qquad r = 1^{\text{mm}},5;$$

rayon de gyration de $\text{S} = 5^{\text{cm}}$; poids de $\text{S} = 18^{\text{kg}}$.

26. Un arbre de transmission, en acier, de 50^{mm} de diamètre, porte deux poulies distantes de 4^{m}. Sur l'une s'exerce le couple moteur et sur l'autre le couple résistant. La puissance transmise est de 80 chevaux et l'arbre fait 750 tours par minute. Calculer l'angle de torsion entre les deux poulies, en admettant la formule donnée dans l'exercice précédent pour le couple de torsion.

27. Calculer la loi suivant laquelle varie la torsion de l'arbre précédent, en supposant que le couple résistant varie suivant la loi

$$\text{C} = \text{C}_0 + a \sin \omega t,$$

C_0 désignant le couple moteur. Quelle est la valeur critique de ω qui donne lieu à la résonance (n° 91) des vibrations torsionnelles? On appellera I le moment d'inertie de chacune des deux poulies et l'on négligera l'inertie de l'arbre. (Écrire séparément l'équation du mouvement de chaque poulie sous l'action du couple moteur et du couple de torsion.)

CHAPITRE VIII.

LES UNITÉS EN MÉCANIQUE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Le moment d'inertie d'un tore de masse spécifique* μ *et dont le cercle générateur a pour rayon* R *et a son centre à la distance* a *de l'axe est donné par la formule*

$$(1) \qquad I = \mu\pi^2 R^2 a \left(2a^2 - \frac{3}{2} R^2\right).$$

Calculer, en kilogrammètres, en ergs, en joules, en kilojoules, les énergies cinétiques des deux tores suivants, tournant chacun autour de leur axe à N *tours par minute :*

(I) $a = 1^{m}.20$, $\quad R = 15^{cm}$, $\quad N = 45$;

(II) $a = 65^{mm}$, $\quad R = 4^{mm}$, $\quad N = 1150$. *Densité commune : 7,8.*

Calculer, en chevaux, en watts, en kilowatts, en poncelets, la puissance moyenne d'un moteur qui les arrêterait, suivant un mouvement uniformément retardé, en 10 *secondes. Évaluer, dans chaque cas, le couple résistant en ergs, kilojoules et kilogrammètres, ainsi que la force en dynes, sthènes et kilogrammes, qui produirait ce couple, en la supposant tangente au parallèle maximum du tore.*

Établissons d'abord les formules générales. L'énergie cinétique est

$$(2) \qquad E = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

ω désignant la vitesse angulaire en radians par seconde. La puissance moyenne d'un moteur qui absorbe cette énergie pendant le temps t est

$$(3) \qquad P = \frac{E}{t}.$$

Le couple résistant (qui est constant) a pour valeur

$$C = \frac{2E}{t\omega}. \tag{4}$$

Enfin, la résistance tangentielle appliquée à la distance x est

$$F = \frac{C}{x}. \tag{5}$$

Toutes ces formules supposent qu'on emploie uniquement des unités absolues appartenant à un même système, lequel peut être choisi arbitrairement. Choisissons, par exemple, le système C. G. S. Nous transformerons ensuite les résultats suivant les unités pratiques demandées.

Nous avons d'abord

$$\mu = d = 7,8;$$

puis,

$$a = 120, \qquad R = 15; \qquad a' = 6,5, \qquad R' = 0,4,$$

en désignant par des lettres accentuées les éléments relatifs au second tore. La formule (1) nous donne alors

$$I = 604 \times 10^8, \qquad I' = 6760. \tag{6}$$

Vérifions l'ordre de grandeur. Dans les deux cas, on peut négliger le second terme de la parenthèse. Si nous remplaçons μ par 8 et π^2 par 10, nous avons à peu près

$$I = 160\,R^2 a^3,$$

soit, en prenant $R = 20$, $a = 100$,

$$I = 160 \times 400 \times 10^6 = 640 \times 10^8$$

et, en prenant $R' = \frac{1}{2}$, $a' = 6$,

$$I' = 40 \times 180 = 7200.$$

On retrouve bien des valeurs du même ordre que les valeurs (6).

Nous avons ensuite

$$\omega = \frac{\pi}{30} \times 45 = 1,5\pi = 4,72; \qquad \omega' = \frac{\pi}{30} \times 1150 = 120,5. \tag{7}$$

Portons dans (2),

$$E = 672 \times 10^9, \qquad E' = 491 \times 10^5 \qquad (\text{en } ergs). \tag{8}$$

Vérifions l'ordre de grandeur. Il suffit de remarquer que $\frac{\omega^2}{2}$ est à peu près égal à 10 et $\frac{\omega'^2}{2}$ à peu près égal à 7×10^5 et de remplacer I' par 7×10^{-5}.

Pour avoir les valeurs de E et de E' en *joules*, il suffit de diviser les précédentes par 10^7, ce qui donne $E = 67200$ et $E' = 4,91$. Les valeurs en kilojoules sont encore 1000 fois plus petites : $E = 67,2$; $E' = 0,00491$.

Le kilogrammètre valant 9,81 joules, les valeurs en *kilogrammètres* sont 9,81 fois plus petites que les valeurs en joules, soit $E = 6840$ et $E' = 0,5$.

On peut aussi passer des valeurs (8) en C. G. S. aux valeurs en M. K. S. en utilisant le symbole de dimensions de l'énergie ML^2T^{-2} et prenant

$$M = \frac{1}{9810}, \qquad L = 10^{-2}; \qquad \text{d'où} \qquad ML^2T^{-2} = \frac{10^{-7}}{9,81}.$$

Il suffit, pour avoir les nouvelles valeurs, de multiplier les valeurs (8) par ce nombre, qui est à peu près égal à 10^{-8}. Cela nous vérifie immédiatement les ordres de grandeur des nombres trouvés ci-dessus.

Calculons maintenant P par la formule (3). Nous devons prendre $t = 10$. En prenant les valeurs de E et de E' en joules, nous obtenons les puissances en *watts* :

$$(9) \qquad P = 6720, \qquad P' = 0,491.$$

En kilowatts, les puissances sont 1000 fois plus petites, soit 6,72 et $4,91 \times 10^{-4}$.

Les puissances en *chevaux* s'obtiennent en divisant les énergies évaluées en kilogrammètres par $75t = 750$, ce qui donne $P = 9,1$ et $P' = \frac{1}{1500}$.

Les puissances en *poncelets* s'obtiennent en divisant les mêmes nombres par $100t = 1000$, ce qui donne $P = 6,84$ et $P' = \frac{1}{2000}$.

Le couple C nous est ensuite donné par la formule (4), en prenant

$$\frac{t\omega}{2} = 23,6 \qquad \text{et} \qquad \frac{t\omega'}{2} = 602,5.$$

En prenant les valeurs (8), on obtient les couples en C. G. S., c'est-à-dire en *ergs* :

$$(10) \qquad C = 284 \times 10^8, \qquad C' = 81500.$$

En M. T. S., c'est-à-dire en *kilojoules*, il faut diviser par 10^{10}, ce qui

donne 2,84 et $8,15 \times 10^{-6}$. En M. K. S., c'est-à-dire en *kilogrammètres*, il suffit de partir des valeurs de E et de E' en kilogrammètres, ce qui donne $C = 290$ et $C' = 8,3 \times 10^{-4}$.

Enfin, appliquons la formule (5), en prenant, en C. G. S.,

(11) $$x = 135, \qquad x' = 6,9.$$

Nous avons, en *dynes* :

(12) $$F = 21 \times 10^{7}, \qquad F' = 11800.$$

Les valeurs en *sthènes* sont 10^{8} fois plus petites, soit 2,1 et $1,18 \times 10^{-4}$.

Enfin, les valeurs en *kilogrammes* peuvent se déduire des couples en kilogrammètres, x et x' étant évalués en mètres, soit

(13) $$x = 1,35 \quad \text{et} \quad x' = 0,069.$$

On obtient ainsi

(14) $$F = 214^{\text{kg}}, \qquad F' = 0^{\text{kg}},012 = 12 \text{ grammes-poids}.$$

Au lieu de prendre le système C. G. S. comme système fondamental, on aurait pu prendre le système M. K. S. Faisons, par exemple, le calcul direct de E en kilogrammètres. On a

$$\mu = \frac{1000\,d}{g} = \frac{7800}{9,81}, \qquad a = 1,2, \qquad R = 0,15.$$

La formule (1) donne

(15) $$I = 615.$$

Portant dans (2), on trouve

(16) $$E = 6840,$$

c'est-à-dire la même valeur que tout à l'heure.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Vérifier l'homogénéité des formules (32) et (34) du Chapitre V, (6), (7), (9), (14), (16), (33), (62), (70), (75), (86), (90) du Chapitre VI.

2. Calculer les symboles de dimensions de la fréquence d'un mouvement vibratoire, des coefficients k et a de l'équation (66) du Chapitre VI.

3. Calculer les dimensions de la constante f de la gravitation (n° 93).

Sachant que $f = 6{,}65 \times 10^{-8}$, en C. G. S., calculer les valeurs dans les systèmes M. T. S. et M. K. S., ainsi que dans le système qui consiste à prendre pour unité de longueur la distance de la Terre au Soleil, soit $149{,}5 \times 10^6$ km, pour unité de temps l'année julienne et pour unité de masse la masse de la Terre. (On donne la densité moyenne de la Terre : 5,5.)

4. Une tige cylindrique de longueur l et de section s s'allonge de la longueur x quand on la soumet à une traction P. On appelle *module d'élasticité* la quantité $E = \frac{Pl}{sx}$. Calculer son symbole de dimensions.

Sachant que, pour un fil d'acier, $E = 28000$, si s est évalué en millimètres carrés et P en kilogrammes, calculer la valeur de E dans les systèmes C. G. S., M. T. S. et M. K. S.

5. Une poutre, de longueur l, encastrée à ses deux extrémités, soumise à une charge uniformément répartie égale à p par unité de longueur, fléchit en son milieu de la quantité

$$f = \frac{1}{384}\frac{pl^4}{EI},$$

E désignant son module d'élasticité (*cf.* Exercice précédent) et I le moment d'inertie de sa section droite par rapport à un axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire au plan de flexion, en supposant la densité superficielle égale à 1. Vérifier l'homogénéité de cette formule. Calculer la flèche d'une poutre en chêne, de 4^m de long, dont la section droite est un rectangle de 15^{cm} et 20^{cm} de côtés, le petit côté étant perpendiculaire au plan de flexion, la charge totale étant de 1000^{kg}. On donne le module d'élasticité du chêne $E = 1170$, l'unité de longueur étant le millimètre.

6. L'allongement d'un ressort à boudin est donné par la formule

$$x = \frac{5\pi n}{E}\frac{Pr^3}{I},$$

où n désigne le nombre de spires, r le rayon du cylindre qui contient les centres de gravité des sections droites du ressort, P la traction et I le *moment d'inertie polaire* de la section droite, c'est-à-dire le moment d'inertie de l'aire de cette section par rapport à son centre de gravité, la densité superficielle étant supposée égale à 1. Vérifier l'homogénéité de cette formule. Calculer x pour un ressort de 10 spires constitué par un

fil cylindrique en acier de 6^{mm} de diamètre, le rayon r étant égal à 35^{mm} et la traction P égale à 40^{kg}. ($E = 28000$, si l'unité de longueur est le millimètre et l'unité de force le kilogramme.)

7. Si le ressort de l'exercice précédent est soumis à un couple de torsion égal à C, l'angle de torsion est, en radians,

$$\theta = C\frac{2\pi r n}{EI}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule. Calculer l'angle de torsion en degrés pour l'application numérique de l'exercice précédent, en supposant que le couple C est produit par une force perpendiculaire à l'axe du ressort, située à 10^{cm} de cet axe et égale à 10^{kg}.

8. Quelles sont les dimensions du coefficient k de la formule (10) du Chapitre VI? Calculer sa valeur en C. G. S. et en M. T. S. en partant des valeurs numériques données au n° 78.

9. Écrire la formule (1) de l'Exercice résolu n° 2 du Chapitre V successivement dans les systèmes C. G. S., M. T. S., M. K. S.

10. On admet que les résistances passives pour une automobile de poids P en kilogrammes, de surface normale à la vitesse égale à S en mètres carrés et enfin de vitesse v en mètres par seconde, ont une résultante égale à $0,0025\,Pv + 0,098\,Sv^2$. Une voiture de 16 chevaux pèse 950^{kg}. Sa surface $S = 1^{m^2},2$. Calculer sa vitesse en palier et dans une rampe de 8 pour 100, en kilomètres à l'heure.

11. Le piston d'une machine à vapeur a 215^{mm} de diamètre et 420^{mm} de course. La pression moyenne de la vapeur dans le sens du mouvement est en excès de $2^{kg},8$ par centimètre carré sur la pression exercée sur l'autre face du piston. Sachant que la manivelle fait 145 tours par minute, calculer la puissance de la machine en chevaux et en kilowatts.

12. La puissance en chevaux d'un navire de T tonnes dont la vitesse est de n nœuds est donnée par la formule empirique $P = kT^{\frac{2}{3}}n^3$, k étant une constante à peu près égale à 0,0042. Quelles sont les dimensions de cette constante? Que devient-elle si l'on évalue P en kilowatts et n en kilomètres à l'heure? (La vitesse de 1 nœud est de 1 mille marin à l'heure; le mille marin vaut 1855^{m}.)

13. Pour mesurer la puissance d'une machine à vapeur, on se sert du

diagramme indicateur de Watt, obtenu en portant en abscisse la course du piston et en ordonnée la pression effective, c'est-à-dire la différence de pression sur les deux faces du piston. On mesure l'aire comprise entre l'axe des x et le diagramme, à l'aide d'un planimètre et l'on trouve 1465^{mm^2}. Quelle est la puissance de la machine, sachant que la manivelle fait 110 tours par minute, que le diamètre du piston est de 250^{mm} et que les échelles du diagramme sont de 1^{mm} pour 1^{cm} de course et de 2^{cm} pour une pression de 1^{kg} par centimètre carré.

14. Calculer l'énergie cinétique due au mouvement de translation de la Terre autour du Soleil, l'énergie cinétique due à son mouvement de rotation sur elle-même et enfin son énergie cinétique totale (théorème de Kœnig, Chap. VII, Exercice proposé n° 13). On évaluera les résultats en kilogrammètres, en kilojoules et en kilowatts-heure. (Pour les données numériques, *voir* Exercice n° 3.)

15. Le pied anglais vaut environ 305^{mm} et la livre vaut environ $453^{g},6$. Le pied étant pris pour unité de longueur et la livre-poids pour unité de force, calculer g, la constante f de la gravitation, la constante k de la résistance de l'air (*cf.* Exercice n° 8), le module d'élasticité E de l'acier (*cf.* Exercice n° 4), le kilogrammètre, le joule. Sachant que le cheval anglais (HP) vaut 550 livres-pieds, calculer sa valeur en kilogrammètres.

CHAPITRE IX.

STATIQUE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Une hélice à axe vertical tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante. Un point pesant peut glisser avec frottement le long de cette hélice. Trouver la condition d'équilibre relatif.*

Nous commencerons par observer que la condition cherchée est, *a priori*, indépendante de la position M du point sur l'hélice, car si l'on change cette position, les forces gardent la même grandeur et la même position par rapport à l'hélice. Pour faciliter les calculs, prenons pour axe des z l'axe de l'hélice orienté vers le bas, pour axe des x le rayon du cylindre rectifiant qui aboutit en M et un axe des y perpendiculaire.

Par rapport à un trièdre de référence invariablement lié à l'hélice, les forces appliquées au point M sont, outre la réaction, son poids $(0, 0, mg)$ et la force centrifuge $(m\omega^2 R, 0, 0)$, en appelant R le rayon du cylindre rectifiant. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la résultante de ces deux forces fasse un angle inférieur à l'angle de frottement avec le plan normal ou, ce qui revient au même, un angle α supérieur à $\frac{\pi}{2} - \varphi$ avec la tangente. Or, les cosinus directeurs de cette résultante sont

$$(1) \qquad \frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^4 R^2 + g^2}}, \quad 0, \quad \frac{g}{\sqrt{\omega^4 R^2 + g^2}}.$$

Ceux de la tangente sont 0, $\sin V$, $\cos V$, en appelant V l'angle constant sous lequel l'hélice coupe les génératrices de son cylindre rectifiant. On a donc

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{g \cos V}{\sqrt{\omega^4 R^2 + g^2}}.$$

La condition d'équilibre est

$$\cos\alpha < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi,$$

ou

$$\frac{g^2\cos^2 V}{\omega^4 R^2 + g^2} < \frac{f^2}{1+f^2},$$

ou, en résolvant par rapport à ω,

(3) $$\omega^4 > \frac{g^2}{R^2}\left(\frac{\cos^2 V}{f^2} - \sin^2 V\right).$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la vitesse angulaire dépasse une certaine limite. Cette limite est d'autant plus grande que f est plus petit. Quand il n'y a pas frottement, elle est infinie et l'équilibre est impossible; ce qui est, du reste, évident *a priori*, car, la force centrifuge étant normale à l'hélice et la pesanteur lui étant oblique, il est impossible que la résultante soit normale.

La condition (3) est remplie quel que soit ω, si $\operatorname{tang} V > \frac{1}{f}$. En particulier, cette dernière inégalité est la condition d'équilibre lorsque l'hélice ne tourne pas. Elle est analogue à la condition d'équilibre du plan incliné.

2. *Un plan* P *tourne uniformément autour de la verticale* Oz, *avec laquelle il fait l'angle* θ. *Trouver la région d'équilibre relatif d'un point pesant* M, *qui glisse avec frottement sur ce plan.*

Prenons pour origine le point de rencontre de P avec l'axe Oz, lequel est supposé orienté vers le haut, le plan des zx étant par ailleurs perpendiculaire à P, de sorte que l'équation de ce dernier plan est

(1) $$x = z \operatorname{tang}\theta.$$

Comme dans l'exercice précédent, nous allons écrire que la résultante de la force centrifuge et de la pesanteur fait avec la normale à P un angle inférieur à l'angle de frottement. Soient (x, y, z) les coordonnées de M. Les composantes de la résultante sont, au facteur m près, $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $-g$. Les cosinus directeurs de la normale au plan sont $\cos\theta$, 0, $-\sin\theta$. La condition d'équilibre est donc

$$\frac{(\omega^2 x\cos\theta + g\sin\theta)^2}{\omega^4(x^2+y^2)+g^2} > \frac{1}{1+f^2}$$

ou

$$(2)\qquad \omega^4[x^2(\sin^2\theta - f^2\cos^2\theta) + y^2] - 2(1+f^2)\omega^2 g x \sin\theta\cos\theta + g^2(\cos^2\theta - f^2\sin^2\theta) < 0.$$

Cette inégalité nous définit la *projection horizontale de la région d'équilibre*. La courbe limite est une conique C, qui admet pour axe Ox, les sommets A et A′ de cet axe ayant pour coordonnées

$$(3)\qquad \frac{g}{\omega^2}\,\frac{(1+f^2)\sin\theta\cos\theta \pm f}{\sin^2\theta - f^2\cos^2\theta}.$$

La conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que $\tan\theta > f$, $< f$ ou $= f$. L'origine appartient à la région d'équilibre, si $\tan\theta > \frac{1}{f}$, ce qui est, du reste, évident *a priori*, car, en ce point, la force centrifuge est nulle et l'on retombe sur l'équilibre ordinaire d'un point pesant sur un plan incliné. On peut remarquer aussi que le point à l'infini sur Oy n'appartient jamais à la région d'équilibre, ce qui est non moins évident *a priori*, car la résultante des deux forces est dirigée suivant cette ligne et, par suite, se trouve dans le plan P, quand M est dans cette position, et cela est incompatible avec l'équilibre, si grand que soit le coefficient de frottement.

En nous bornant au cas où le coefficient de frottement est < 1, la figure 25 nous montre la région d'équilibre (en projection horizontale, région non hachurée) dans les quatre principaux cas.

Fig. 25.

Signalons encore les cas particuliers suivants :

I : $f = 0$. — L'inégalité (2) s'écrit

$$(4)\qquad (\omega^2 x\sin\theta - g\cos\theta)^2 + \omega^4 y^2 \leq 0.$$

L'égalité seule peut avoir lieu, pour

$$(5)\qquad y = 0, \qquad x = \frac{g}{\omega^2}\cot\theta.$$

Il n'y a qu'une seule position d'équilibre, située sur la projection

de Oz sur P. Il était d'ailleurs facile de l'obtenir directement, en écrivant que la résultante des deux forces est perpendiculaire au plan.

II : $\theta = \frac{\pi}{2}$. — Autrement dit, P est perpendiculaire à Oz. L'inégalité (2) devient

(6) $$\omega^4(x^2+y^2)-g^2f^2 < 0.$$

La région d'équilibre est un cercle de centre O et de rayon $\frac{fg}{\omega^2}$, ce qu'il serait également très facile de trouver directement.

3. *On donne trois points fixes* A, B, C, *formant un triangle équilatéral de côté* 2 *et trois points libres* M, N, P *qui s'attirent mutuellement suivant une force égale à la distance. De plus,* A, B, C *attirent respectivement* M, N, P *suivant des forces égales aux distances* AM, BN, CP. *Trouver la position d'équilibre du système. Dire si elle est stable.* (*Certificat de Mécanique rationnelle*, Clermont-Ferrand, juin 1914; extrait du *Calcul pratique*.)

Prenons l'origine des coordonnées au milieu de AB, l'axe des x suivant OA et l'axe des y suivant OC. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées inconnues de M, N, P. On peut obtenir les équations d'équilibre en écrivant que la résultante des forces appliquées à chacun des trois points a ses deux projections nulles. On obtient ainsi six équations, desquelles on peut tirer ensuite les six inconnues $x_1, \ldots, y_3$. On peut aussi remarquer que *les forces appliquées au système dérivent d'une fonction de forces*,

$$U = -\frac{1}{2}(AM^2+BN^2+CP^2+NP^2+PM^2+MN^2)$$

ou

(1) $$\begin{aligned} U = -\frac{1}{2}\Big[(x_1-1)^2+y_1^2+(x_2+1)^2+y_2^2+x_3^2+\left(y_3-\sqrt{3}\right)^2 \\ +(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(x_1-x_3)^2 \\ +(y_1-y_3)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\Big]. \end{aligned}$$

On a les six équations d'équilibre en annulant ses six dérivées partielles par rapport à $x_1, \ldots, y_3$. On obtient ainsi le système

(2) $$3x_1-x_2-x_3-1=0, \quad 3x_2-x_3-x_1+1=0, \quad 3x_3-x_1-x_2=0;$$

(3) $$3y_1-y_2-y_3=0, \quad 3y_2-y_3-y_1=0, \quad 3y_3-y_1-y_2-\sqrt{3}=0.$$

En ajoutant les équations (2), on a

(4) $$x_1+x_2+x_3=0;$$

puis, en ajoutant (4) successivement à chacune des trois équations (2), il vient

$$(5) \qquad x_1 = \frac{1}{4}, \qquad x_2 = -\frac{1}{4}, \qquad x_3 = 0.$$

En opérant de même sur le système (3), on trouve

$$(6) \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nous avons finalement les coordonnées des positions d'équilibre. Le point P, par exemple, se trouve sur Oy et, en appelant G le centre de gravité de ABC, on a

$$\frac{\overline{GP}}{\overline{GC}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Si l'on tient compte des symétries évidentes de la question, on conclut de là que *la position d'équilibre du triangle* MNP *est homothétique et concentrique au triangle* ABC, *le rapport d'homothétie étant* $\frac{1}{4}$.

Il est facile de voir que *l'équilibre est stable*. En effet, si l'on fait le changement de variables

$$x_1 = \frac{1}{4} + u_1, \qquad x_2 = -\frac{1}{4} + u_2, \qquad x_3 = u_3;$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + v_1, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + v_2, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + v_3,$$

la fonction U devient un polynome en $u_1, \ldots, v_3$ qui ne renferme plus de termes du premier degré, car ses six dérivées du premier ordre doivent s'annuler pour $u_1 = u_2 = \ldots = v_3 = 0$; il est, au surplus, très facile de s'en assurer par un calcul direct. Quant aux termes du second degré, ils constituent une forme quadratique définie [1] négative (t. I, n° 306). Il suit de là que U est maximum lorsque les nouvelles variables sont toutes nulles. Par conséquent, l'équilibre est stable, en vertu du théorème général du n° 120.

Remarque. — L'équation (4) et l'équation analogue en y auraient pu

---

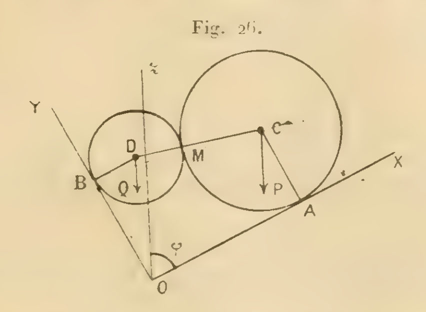
[1] La forme quadratique est définie, car son discriminant n'est pas nul, sans quoi le système (2), (3), obtenu en annulant les dérivées, aurait été incompatible ou indéterminé, ce qui n'a pas eu lieu.

être obtenues directement, en écrivant que les forces extérieures ont une somme géométrique nulle.

4. *On donne un dièdre droit XOY, dont l'arête O est horizontale et dont la concavité est tournée vers le haut. Dans ce dièdre, on pose deux sphères pesantes et l'on cherche à les placer en équilibre de telle manière qu'elles soient tangentes entre elles et que chacune d'elles ne soit tangente qu'à une seule face du dièdre. Cet équilibre est-il possible et, s'il l'est, est-il stable ? On suppose qu'il n'y a pas de frottement.*

Montrons d'abord, ainsi qu'on le devine par raison de symétrie, que les centres C et D (*fig.* 26) des deux sphères sont nécessairement dans

Fig. 26.



un même plan perpendiculaire à l'arête O du dièdre. En effet, la sphère C, par exemple, est soumise à son poids P, à la réaction A de la face OX et à la réaction N de la sphère D. Ces trois forces doivent avoir une somme géométrique nulle. Or, les deux premières sont perpendiculaires à O, donc aussi la troisième. Comme cette dernière est dirigée suivant la normale DC, cette droite est bien perpendiculaire à O.

Prenons dès lors, le plan ACDB comme plan de figure et prenons comme inconnue l'angle $\theta = (\widehat{OX, DC})$. Cet angle étant calculé, on en déduira facilement les positions des deux sphères, car si R désigne le rayon de C et R′ celui de D, les coordonnées des centres sont

(C) $$x = R' - (R + R')\cos\theta, \quad y = R;$$
(D) $$x = R', \quad y = R - (R - R')\sin\theta,$$

ainsi qu'on le voit en projetant sur les axes les contours OBDC et OACD.

Cela posé, on peut employer diverses méthodes pour trouver la position d'équilibre.

Première méthode. — Calculons N en projetant les forces appliquées à C sur OX, de manière à éliminer la réaction A. Nous avons

$$(1) \qquad N\cos\theta - P\cos\varphi = 0, \qquad N = P\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

En opérant de même pour la sphère D, on trouve

$$(2) \qquad N'\sin\theta - Q\sin\varphi = 0, \qquad N' = Q\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}.$$

Or, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on doit avoir $N' + N = 0$; d'où

$$(3) \qquad P\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} + Q\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\theta = -\frac{Q}{P}\operatorname{tang}\varphi.$$

Telle est la valeur de θ qui correspond à la position d'équilibre.

Deuxième méthode. — Appliquons le *théorème des travaux virtuels* en écrivant que la fonction des forces est maximum (n° 120). Si z et z' désignent les cotes de C et de D, cette fonction est

$$U = -(Pz + Qz').$$

Or,

$$z = x\cos\varphi + R\sin\varphi = (R + R')\cos\theta\cos\varphi + \text{const.},$$
$$z' = R'\cos\varphi + y\sin\varphi = -(R + R')\sin\theta\sin\varphi + \text{const.};$$

d'où, en négligeant des constantes additives,

$$(5) \qquad U = (R + R')(Q\sin\theta\sin\varphi - P\cos\theta\cos\varphi).$$

En annulant $\frac{dU}{d\theta}$, on retrouve (4).

Cette méthode a l'avantage de *nous renseigner immédiatement sur la stabilité*. Il suffit de voir si U est maximum ou minimum, en se servant, par exemple, de la dérivée seconde, $U'' = -U$. En tenant compte de (4), on trouve

$$U'' = -U = -Q\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(R + R').$$

Comme, d'après (4), θ est négatif, on en conclut que $U'' > 0$ et, par

suite, U passe par un minimum (t. I, n° 124). Donc, *l'équilibre est instable.*

Pratiquement, cet équilibre est impossible à réaliser. Si l'on cherche à le produire, l'une des sphères glisse sous l'autre et vient reposer dans le fond du dièdre, dont elle touche alors les deux faces.

Calcul des réactions des plans OX *et* OY. — Si l'on projette les forces appliquées à la sphère C sur la perpendiculaire à DC, on a

$$A \cos\theta - P \sin(\varphi - \theta) = 0;$$

d'où

$$A = P \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos\theta}.$$

On calcule de même

$$B = -Q \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\theta}.$$

Comme vérification, la somme algébrique des projections de ces deux réactions sur la perpendiculaire à Oz doit être nulle, en vertu des conditions universelles appliquées au système des deux sphères. Cela se traduit par l'égalité

$$A \cos\varphi - B \sin\varphi = 0.$$

En remplaçant A et B par les valeurs ci-dessus, on retombe sur l'équation (3).

5. *Sur un plateau d'une balance, se trouve un vase contenant un liquide au repos jusqu'à une certaine hauteur. Sur l'autre plateau, on met une tare, de manière que l'aiguille soit au zéro. On plonge dans le liquide un corps solide* S *et l'on rétablit l'équilibre avec des poids marqués. Dans quel plateau doivent-ils être placés et quelle doit être leur somme?*

Soit P le poids total du vase et du liquide, donc de la tare. Dans les nouvelles conditions, ce poids P doit former un système nul avec les réactions R du plateau et R′ du solide S. Or, en vertu du principe d'Archimède [1], les réactions R′ ont une résultante verticale, dirigée de

---

[1] Voici la démonstration de ce principe. La pression en chaque point de la surface Σ de S ne dépend, si le liquide est en équilibre, que de la distance de ce point à la surface libre. Donc, si le solide n'existait pas et si la surface libre restait la même, la distribution des pressions sur Σ ne serait pas modifiée. Mais, si l'on applique les conditions universelles d'équilibre à la masse de liquide intérieure à Σ, on trouve que ces pressions ont une résultante égale et opposée au poids p, ce qui est le principe d'Archimède.

haut en bas et égale au poids p du liquide déplacé par S. Il s'ensuit que les réactions R du plateau ont une résultante verticale, dirigée de bas en haut et égale à $P + p$. Les réactions du vase sur le plateau ont une résultante opposée à la précédente. C'est cette résultante qui doit être égale au poids total placé dans le deuxième plateau. Donc, ce poids doit être augmenté de p, et cela donne la réponse à la question posée.

6. *Une table repose sur un plan horizontal par quatre pieds* A, B, C, D, *formant un rectangle. Elle supporte une charge* P, *appliquée en un point quelconque. Calculer les pressions des quatre pieds, en supposant que chacun d'eux se raccourcit proportionnellement à la pression qu'il supporte et que la table reste plane.*

Prenons pour axes de coordonnées les axes du rectangle ABCD (*fig.* 27) et soient (x, y) les coordonnées du point M où le poids P

Fig. 27.

(que nous supposons être le poids total de la table et des objets qu'elle supporte) perce le plan horizontal. Appelons A, B, C, D les pressions des pieds représentés par les mêmes lettres. Le système de ces quatre forces verticales doit être équivalent à la force unique P. On a donc (t. II, n° 127)

$$P = A + B + C + D, \tag{1}$$

$$Px = (A - B - C + D)a, \tag{2}$$

$$Py = (A + B - C - D)b. \tag{3}$$

Nous avons quatre inconnues et seulement trois équations. Les liaisons sont hyperstatiques (n° 143) et les équations universelles d'équilibre sont insuffisantes pour nous donner la répartition des pressions. Faisons alors intervenir l'hypothèse supplémentaire de l'énoncé. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les raccourcissements des pieds A, B, C, D. Ils ne sont pas indépendants, du fait que la table reste plane. On pourrait exprimer cette condition au moyen des coordonnées des extrémités supérieures des quatre pieds, en se servant de la formule (34) du n° 91 du Tome II. Mais il est plus simple d'exprimer que les milieux des diagonales AC et BD restent

confondus, c'est-à-dire qu'ils s'abaissent de la même quantité. Cela nous donne immédiatement la relation cherchée

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Comme les pressions sont proportionnelles aux raccourcissements, on en déduit

$$(4)\qquad A + C - B - D = 0.$$

Nous avons maintenant quatre équations et l'on en tire, par un calcul simple,

$$(5)\qquad A = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \qquad B = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$
$$C = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \qquad D = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Ce calcul n'est valable que *si les quatre pressions trouvées sont positives*, si l'on suppose que les pieds de la table sont simplement posés sur le plan horizontal, sans y être attachés. Ceci se traduit par quatre inégalités du premier degré en x, y, qui s'interprètent comme il a été expliqué au n° 56 du Tome II. On reconnaît sans peine qu'elles ne sont toutes satisfaites que *si* M *est intérieur au losange* EFGH (*fig.* 27).

Si M se trouve, au contraire, dans le triangle AEH, par exemple, on a

$$1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} < 0, \qquad C < 0.$$

On conclut de là que *le pied* C *ne presse pas sur le sol* et, par conséquent, qu'en réalité, la table fonctionne comme un trépied, les points d'appui étant A, B, D. Nous devons alors reprendre les équations universelles (1), (2), (3) et y annuler C. Nous n'avons plus que trois inconnues et un calcul facile nous donne

$$(6)\qquad A = \frac{P}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \qquad B = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right), \qquad D = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Ces pressions doivent encore être positives. Cela est bien réalisé si M est, comme nous l'avons supposé, intérieur au triangle AEH. Si M était, au contraire, à l'extérieur du rectangle, par exemple dans la région ($x > a$, $0 < y < b$), B deviendrait négatif, le pied B se soulèverait en même temps que C, *la table basculerait autour de la ligne* AD. Si l'on avait $x > a$ et $y > b$, B et D deviendraient négatifs, les trois pieds C, B, D quitteraient le sol; *la table pivoterait sur le pied* A.

7 [1]. *Dans le but de mesurer la vitesse initiale d'un projectile, on se propose de lui faire entraîner un fil de longueur indéfinie et dont une extrémité comporte une boucle qui coiffe l'obus à sa sortie du canon. Calculer la tension du fil. Calculer la vitesse à partir de laquelle se produit la rupture, en supposant que la tension de rupture est de* 7^{kg} *par millimètre carré et que la densité du fil est de* 1,3.

Au temps t, une certaine longueur de fil a pris la vitesse v du projectile. Si nous supposons cette vitesse uniforme et si nous négligeons le poids du fil et la résistance de l'air, le fil est rectiligne et a une tension T uniforme (n° 146). Pour calculer cette tension, appliquons le théorème des quantités de mouvement au fil qui suit un point quelconque A de la portion déjà entraînée. Pendant le temps dt, une longueur $v\,dt$ de ce fil passe de la vitesse 0 à la vitesse v. Si m désigne la masse de 1^{cm} de longueur de fil, la quantité de mouvement est augmentée de $mv\,dt.v = mv^2dt$, dans la direction de la vitesse de l'obus. D'autre part, les forces extérieures se réduisent, avec les approximations supposées ci-dessus, à la tension T appliquée en A. Ceci nous prouve d'abord que cette tension doit être parallèle à la vitesse du projectile et, par conséquent, que le fil prend la direction de cette vitesse, comme cela paraît bien évident *a priori*. En outre, T doit être égal au quotient de l'accroissement de la quantité de mouvement par dt, soit

$$T = mv^2. \tag{1}$$

Si S désigne la surface, en centimètres carrés, de la section droite du fil, si D désigne sa densité et si enfin v est évalué en centimètres par seconde, on a

$$T = DSv^2 \text{ dynes} = \frac{DSv^2}{981\,000} \text{ kilogrammes-poids.} \tag{2}$$

Si R désigne la tension de rupture par millimètre carré, la vitesse de rupture est donnée par

$$\frac{DSv^2}{981\,000} = 100RS, \quad v = 10000\sqrt{\frac{0,981\,R}{D}} \text{ centimètres par seconde} \tag{3}$$

ou

$$v = 100\sqrt{\frac{0,981\,R}{D}} \text{ mètres par seconde.} \tag{4}$$

Si l'on prend R = 7 et D = 1,3, on trouve $v = 230^{m}$ par seconde.

---

[1] Cet exercice se rattache aussi bien au Chapitre VII.

8. *On pose un cylindre de révolution sur un plan incliné, la génératrice de contact faisant l'angle α avec la ligne de plus grande pente. Calculer la limite que ne doit pas dépasser cet angle pour que le cylindre ne roule pas. Dans quelles conditions le cylindre peut-il rester entièrement en équilibre ?*

Soient R le rayon du cylindre, P son poids et i l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. Le couple de frottement de roulement a un moment égal et opposé au moment du poids P par rapport à la génératrice de contact G. Pour évaluer ce moment, nous remarquons que le moment de P par rapport à la projection O sur G du centre de gravité du cylindre est horizontal et égal à $PR \sin i$. Sa projection sur G est $PR \sin i \sin\alpha$. D'autre part, la composante normale $N = P\cos i$. La condition de non-roulement est donc (n° 135)

$$PR \sin i \sin\alpha < hP\cos i$$

ou

(1) $$\sin\alpha < \frac{h}{R \tang i}.$$

Si elle est remplie, le cylindre ne peut pas rouler; mais il lui est peut-être encore permis de glisser. Pour qu'il reste totalement en équilibre, il faut et il suffit que l'angle i soit inférieur à l'angle φ de frottement de glissement (n° 166, II).

La condition (1) est remplie quel que soit α, si

(2) $$R < h \cot i.$$

Sinon, l'angle α doit être inférieur à une certaine limite β donnée par

(3) $$\sin\beta = \frac{h}{R \tang i}.$$

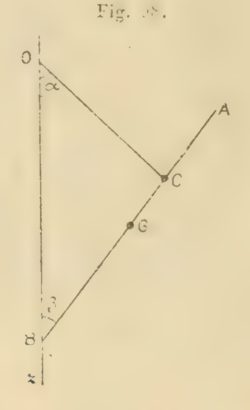
En résumé, *si* $R \leqq h \cot i$, *le cylindre ne roule jamais; si* $i \geqq \varphi$, *il glisse; si* $i < \varphi$, *il reste au repos.*

Si $R < h \cot i$, *le cylindre roule pour* $\alpha > \beta$; *pour* $\alpha < \beta$, *il glisse, si* $i \geqq \varphi$; *il reste au repos, si* $i < \varphi$.

Application numérique. — Pour un cylindre de bois roulant sur un plan en bois, on peut prendre, en unités M. K. S., $h = 0,002$ et $f = 0,6$. Supposons, par exemple, que $i = \varphi = 31^\circ$ environ. *Le rayon limite* $h \cot i$ est égal à $\frac{0,002}{0,6}$, soit $\frac{1}{3}$ de centimètre. Pour un rayon de 5^{mm}, on trouve que *l'angle limite* $\beta = 48^\circ$. Pour un rayon de 25^{cm}, on trouve $\beta = 46'$.

9. *Un cadre AB s'appuie en B contre un mur vertical Oz. Il est, d'autre part, attaché à ce mur au moyen de la ficelle OC. Étudier son équilibre.*

Fig. 58.



Posons BG $= a$, BC $= b$, OC $= l$. Appelons α l'angle zOC et β l'angle OBC. Chacun d'eux est compris entre o et π. Ils sont liés par la relation

(1) $$l \sin\alpha = b \sin\beta.$$

Si $l < b$, α peut varier de o à π; β reste aigu et $< \beta'$, tel que

$$\sin\beta' = \frac{l}{b}.$$

Si $l > b$, on a des conclusions analogues, en échangeant les rôles de α et β.

Équilibre sans frottement. — Appliquons, par exemple, le *théorème des travaux virtuels*, en écrivant que *la cote z du centre de gravité* G *est maximum ou minimum*. Cela aura l'avantage de nous renseigner sur la stabilité, qui n'existe que lorsque z est maximum (nº 120). Nous avons, en projetant OCG sur Oz,

(2) $$z = l\cos\alpha + (b - a)\cos\beta.$$

Dérivons par rapport à α :

$$\frac{dz}{d\alpha} = -l\sin\alpha + (a - b)\sin\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha},$$

ou, en tenant compte de (1) et de la formule qu'on en déduit par

dérivation,

(3) $$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{l}{b}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

(4) $$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{b}{l'}\cdot\tang\beta\,(l\cos\alpha - l'\cos\beta),$$

en posant

(5) $$l' = \frac{b^2}{a-b}.$$

Cette dérivée s'annule pour

(6) $$l\cos\alpha = l'\cos\beta.$$

Élevons au carré (1) et (6) et ajoutons; nous obtenons la valeur de β qui correspond à la position d'équilibre

(7) $$\tang^2\beta_1 = \frac{l^2 - l'^2}{b^2 - l^2}.$$

Cet angle n'existe que si l est compris entre b et l'. Si $b > a$, l' est négatif et supérieur à b en valeur absolue. Si $b < a$, l' est positif; il est $> b$, si $2b > a$. Nous avons dès lors à distinguer les cas suivants :

1° $b < \frac{a}{2}$. — $0 < l' < b$. *Si* $l < l'$, β_1 n'existe pas, *l'équilibre est impossible.* D'ailleurs, pour $\alpha = \beta = 0$, la parenthèse de (4) est négative; on en conclut que $\frac{dz}{d\alpha}$ est constamment négative, car l étant $< b$, β reste aigu et sa tangente reste positive. Comme z tend toujours à augmenter, on voit que α diminue quand on abandonne le cadre dans une position quelconque.

Si $l' < l < b$, β_1 existe; d'après (6), l'angle α_1 correspondant est aigu. Pour $\alpha < \alpha_1$, $\frac{dz}{d\alpha} > 0$; donc z est maximum pour la position d'équilibre, laquelle est une position d'*équilibre stable.*

Si $l > b$, β_1 n'existe pas; on voit sans peine que $\frac{dz}{d\beta}$ est toujours > 0. Il n'y a *pas de position d'équilibre* et β tend toujours à augmenter, quelle que soit la position du cadre.

2° $\frac{a}{2} < b < a$. — $l' > b$. *Si* $l < b$, β_1 n'existe pas; il n'y a *pas de position d'équilibre* et α tend toujours à diminuer.

Si $b < l < l'$, β_1 existe; la formule (6) montre d'ailleurs qu'il est aigu.

Pour $\alpha < \alpha_1$, $\frac{dz}{d\alpha} < 0$; donc z passe par un minimum, *l'équilibre est instable.*

Si $l > l'$, l'équilibre est impossible et β tend toujours à augmenter.

3° $b > a$. — $l' < 0$, — $l' = l'' > b$. *Si $l < b$, l'équilibre est impossible.* α tend toujours à diminuer.

Si $b < l < l''$, β_1 existe et il est obtus après (6). On voit encore que z est minimum; *l'équilibre est instable.*

Si $l > l''$, l'équilibre est impossible et β tend toujours à diminuer. On voit qu'il n'y a qu'*un seul cas où il existe une portion d'équilibre stable.*

Il nous resterait encore à examiner les cas intermédiaires. Signalons seulement celui où $b = \frac{a}{2}$ et $l = b$. La formule (2) donne alors $z = 0$, en remarquant que $\alpha = \beta$. *Le cadre est en équilibre dans n'importe quelle position.*

Équilibre avec frottement. — Soient N et F les composantes normale et tangentielle de la réaction du mur sur le cadre en B, T la tension de la ficelle et P le poids du cadre. Toutes ces forces doivent former un système nul. En prenant le moment par rapport à O, on a

$$(8) \qquad \mathrm{N} = \mathrm{P}\frac{a \sin\beta}{x},$$

en posant $x = \mathrm{OB}$. En prenant ensuite le moment par rapport à C, il vient

$$(9) \qquad \mathrm{F}b\sin\beta + \mathrm{N}b\cos\beta + \mathrm{P}(b-a)\sin\beta = 0.$$

En éliminant P entre ces deux équations, on obtient une équation qui donne le rapport $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{N}} = y$:

$$y = \frac{(a-b)x - ab\cos\beta}{ab\sin\beta},$$

ou, en remplaçant x par $l\cos\alpha + b\cos\beta$,

$$(10) \quad y = \frac{l(a-b)\cos\alpha - b^2\cos\beta}{ab\sin\beta} = \frac{(a-b)(l\cos\alpha - l'\cos\beta)}{ab\sin\beta}.$$

Pour l'équilibre, *ce rapport doit être compris entre $-f$ et f.* Avant d'aller plus loin, il est intéressant de rapprocher la formule (10) de la formule (4). On voit que, si β reste aigu ($l < b$), *y a toujours le signe*

de $\frac{dz}{d\alpha}$ *et s'annule en même temps.* Ceci nous prouve que les positions d'équilibre sans frottement trouvées précédemment seraient également obtenues en annulant y, ce qui était évident, puisque cela revient à écrire que la réaction est normale. En outre, si y est, par exemple, positif, la force de frottement en B est dirigée vers le bas; donc, si on la supprime, B tend à remonter et, par suite, α tend à augmenter; donc aussi z, puisque $\frac{dz}{d\alpha} > 0$. Cela est bien conforme au fait utilisé précédemment que le centre de gravité tend toujours à descendre. On aurait des conclusions analogues dans le cas où c'est α qui reste aigu ($l > b$); mais on considérerait alors la dérivée $\frac{dz}{d\beta}$, déduite de (4) et de (3).

Il s'agit maintenant de *trouver les régions d'équilibre.* Si l'on essaie de *trouver directement les positions de démarrage*, en égalant y à f ou à $-f$, on a des calculs compliqués, qui conduisent à une *équation du quatrième degré.* En outre, en admettant qu'on ait obtenu une telle position, *on ne sait pas de quel côté est la région d'équilibre qu'elle limite.* Il n'est pas certain (et nous verrons même que cela peut être faux) que cette région soit du côté opposé à celui vers lequel se produit le démarrage et *il est absolument nécessaire de résoudre la double inégalité*

$$-f < y < f. \tag{11}$$

A cet effet, nous allons (*cf.* n° 132) construire la courbe (α, y) ou (β, y), suivant que c'est α ou β qui peut varier de 0 à π. L'*arc d'équilibre* sera la portion de cette courbe qui est comprise entre les droites D et D′ :

$$(D) \quad y = f, \qquad (D') \quad y = -f.$$

Pour faire cette construction, nous utiliserons soit la formule (10), soit la formule équivalente, d'après (1),

$$y = \frac{(a-b)(l\cos\alpha - l'\cos\beta)}{al\sin\alpha}. \tag{12}$$

Dérivons cette dernière par rapport à α; nous avons, en tenant compte de (3) et de (5),

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{-l(a-b) - b\sin\alpha\sin\beta \,.\, l\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + b^2\cos\alpha\cos\beta}{al\sin^2\alpha}$$

ou, en tenant compte de (1),

$$(13)\qquad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{(a-b)(l'\cos\alpha - l\cos\beta)}{al\sin^2\alpha\cos\beta}.$$

En tenant compte de (3) et (1), on a ensuite

$$(14)\qquad \frac{dy}{d\beta} = \frac{(a-b)(l'\cos\alpha - l\cos\beta)}{ab\sin^2\beta\cos\alpha}.$$

Ces dérivées s'annulent pour

$$(15)\qquad l'\cos\alpha = l\cos\beta.$$

On retrouve l'équation (6), à l'échange près de l et de l'. En la combinant avec (1), comme on a fait pour (6), on trouve

$$(16)\qquad \operatorname{tang}^2\alpha_2 = \frac{b^2}{l^2}\,\frac{l^2-l'^2}{l^2-b^2} = -\frac{b^2}{l^2}\operatorname{tang}^2\beta_1.$$

On voit que *la dérivée de y s'annule quand y ne s'annule pas*, et *vice versa*.

Calculons les valeurs remarquables de y.

Pour $\alpha = \beta = 0$, y devient infini avec le signe de $(a-b)(l-l')$;

Pour $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, y devient infini avec le signe de $(a-b)(l+l')$;

Pour $\alpha = \pi$, $\beta = 0$, y devient infini avec le signe de $(b-a)(l+l')$.

Ceci suppose toutefois que les trois produits ci-dessus sont différents de zéro.

Si $a = b$, la première forme de la formule (10) nous donne

$$(17)\qquad y = -\cot\beta$$

dont les variations sont évidentes.

Si $l = l'$, on a

$$(18)\qquad y = \frac{b}{a}\,\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta}.$$

Si α et β sont infiniment petits, leurs parties principales sont liées, d'après (1), par $l\alpha = b\beta$ et y est asymptotique à $\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{b^2}{l^2}\right)\frac{b}{a}$.

On verrait de même que, *si $l = -l'$*, y est asymptotique à

$$-\frac{b}{2a}\varepsilon\left(1-\frac{b^2}{l^2}\right),$$

lorsque $\beta = \pi - \varepsilon$.

Il nous est maintenant très facile de discuter les différentes formes que peut affecter notre courbe. Elles sont représentées sur les figures 29 à 33. Au sujet de leur interprétation, nous ferons l'observation suivante. On peut quitter un arc d'équilibre en traversant D ou D'. Dans le premier cas, $y = f$, la force de frottement est dirigée vers le bas; donc, le glissement du point B a lieu vers le haut et il est facile de vérifier que, dans tous les cas, celui des deux angles qui sert d'abscisse se met à augmenter. Autrement dit, le point représentatif M va vers la droite. Dès lors, si, au point de sortie, la pente de la courbe est positive, M s'éloigne de la région d'équilibre; nous dirons que l'équilibre est *instable*. Si, au contraire, la pente de la courbe est négative, M tend à rentrer dans la région d'équilibre; nous dirons que l'équilibre est *stable*. Dans ce dernier cas, la région d'équilibre est celle vers laquelle se produit le démarrage, contrairement à ce que l'on admet habituellement, quand on résout les problèmes de Statique avec frottement en se bornant à chercher les conditions de démarrage.

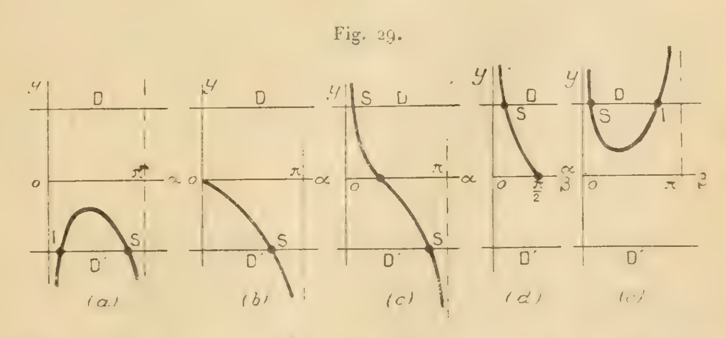
Pour la sortie à travers D', on aboutit aux mêmes conclusions.

Sur les figures 29 à 33, nous avons indiqué par les lettres I et S les extrémités instables et stables des arcs d'équilibre.

Les cas à considérer sont les mêmes que tout à l'heure lorsqu'il n'y avait pas frottement.

I : $b < \frac{a}{2}$. — Figure 29. (*a*) : $l < l'$. Si le coefficient de frottement

Fig. 29.



est assez grand, il y a un arc d'équilibre, instable pour la limite inférieure et stable pour la limite supérieure [1]. Le cadre tend toujours à descendre.

---

[1] Nous appelons *limite supérieure* celle pour laquelle le point B est le plus élevé.

(b) : $l = l'$. Arc d'équilibre limité à l'origine, stable pour la limite supérieure.

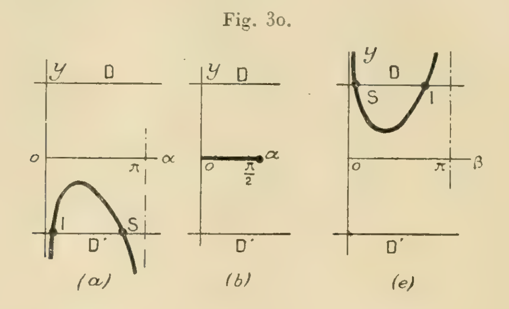
(c) : $l' < l < b$. Arc d'équilibre comportant une position d'équilibre sans frottement (rapprocher de la première partie) et stable aux deux limites.

(d) : $l = b$. Arc d'équilibre limité à la position d'équilibre sans frottement, qui est perpendiculaire au mur et que le cadre ne peut pas dépasser.

(e) : $b < l$. Arc d'équilibre, si f est assez grand, stable pour la limite inférieure et instable pour la limite supérieure. Le cadre tend toujours à monter.

II : $b = \frac{a}{2}$. — Figure 30. On a les mêmes conclusions que précédem-

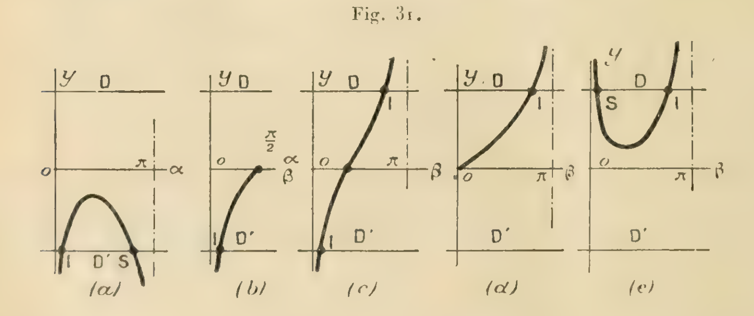
Fig. 30.



ment, sauf que le cas (c) n'existe pas et que, dans les cas (b) et (d), qui se confondent, il y a équilibre indifférent sans frottement.

III : $\frac{a}{2} < b < a$. — Figure 31. (a) : $l < b$. Comme I, (a).

Fig. 31.



(b) : $l = b$. Comme I, (d), sauf que la limite inférieure est instable, tandis qu'elle était stable tout à l'heure.

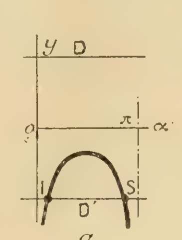
(c) : $b < l < l'$. Comme I, (c), sauf que l'équilibre est instable aux deux extrémités.

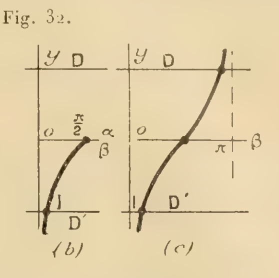
(d) : $l = l'$. Comme I, (b), sauf que la limite supérieure est instable.

(e) : $l' < l$. Comme I, (e).

IV : $a = b$. — Figure 32. Mêmes conclusions que pour III, avec cette

Fig. 32.

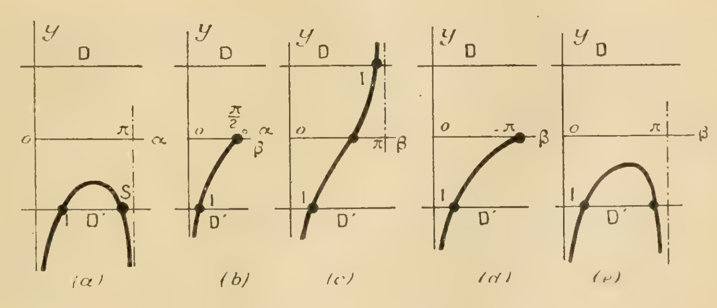




particularité que l' est infini, de sorte que les cas (d) et (e) n'existent pas. En outre, la courbe possède un élément de symétrie.

V : $a < b$. — Figure 33. (a) : $l < b$. Comme I, (a).

Fig. 33.



(b) : $l = b$. Comme III, (b).

(c) : $b < l < l''$. Comme III, (c).

(d) : $l = l''$. Arc d'équilibre limité à $\beta = \pi$ (cadre face contre le mur), la limite inférieure étant instable.

(e) $l'' < l$. Comme I, (a).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Un poids P de 118^{kg} est attaché aux extrémités de deux cordes AP et BP, ayant respectivement pour longueurs 2^m et $3^m,20$, et fixées en A

et en B, le point B étant placé à 50^{cm} au-dessus de A et à une distance horizontale de ce point égale à $1^m,90$. Calculer les tensions des deux cordes.

2. Un ballon pesant 800^{kg} a une force ascensionnelle de 130^{kg}. Il supporte un trapèze, auquel est suspendu un gymnaste pesant 66^{kg}. Quel effort doivent supporter les bras de ce dernier? [Introduire la force d'inertie du gymnaste. L'effort sur chaque bras est de $33\left(1+\frac{130}{866}\right)$ kg.]

3. Un train est animé d'un mouvement uniformément accéléré. Un pendule, dont une extrémité est attachée à l'intérieur d'un wagon, s'écarte de $28°$ de la verticale. Calculer l'accélération du train.

4. Un train pesant 110^t, non compris la locomotive, se compose de 18 wagons ayant sensiblement le même poids. Le train démarre d'un mouvement accéléré tel que la vitesse atteigne 40^{km} à l'heure au bout de 2 minutes. Sachant que les résistances passives sont en moyenne de 4^{kg} par tonne, calculer les tensions des attelages reliant chaque wagon au précédent et le premier wagon à la locomotive.

5. Un train, pesant en tout 125^t, descend une pente de 5 pour 100. Les résistances passives sont de 7^{kg} par tonne. Le train comprend un wagon-citerne, contenant un certain liquide. En supposant ce liquide en équilibre relatif, calculer l'angle que fait sa surface libre avec le plan horizontal.

6. Un point mobile M est soumis, de la part de n points fixes, à des attractions, dont chacune est proportionnelle à la masse du point attirant et à sa distance à M. Quelle est la position d'équilibre de M? L'équilibre est-il stable? En serait-il de même si les attractions étaient remplacées par des répulsions? (La résultante des attractions est la même que si les points attirants étaient confondus en leur centre de gravité.)

7. On donne n points fixes en ligne droite M_1, M_2, ..., M_n, de masses m_1, m_2, ..., m_n. Un point libre M est attiré par ces points fixes suivant la loi de Newton (n° 93). Démontrer qu'il y a une position d'équilibre sur chaque segment limité par deux points attirants consécutifs. Prouver qu'elles sont toutes instables.

(La résultante croît de $-\infty$ à $+\infty$, quand M va de M_i au point suivant M_{i+1}. Pour l'instabilité, prendre la position d'équilibre pour origine et développer la fonction des forces suivant les puissances des

coordonnées x, y, z de M. On trouve que $U_0 - U$ a le signe de $2x^2 - y^2 - z^2$. Donc, U n'est pas maximum en O.)

8. On reprend les points précédents; mais on les suppose distribués d'une manière quelconque dans l'espace. Démontrer que, pour qu'une position d'équilibre O soit stable, il faut et il suffit qu'une droite quelconque OA issue de O fasse avec OM_1, OM_2, ..., OM_n des angles θ_1, θ_2, ..., θ_n, tels que l'on ait

$$(1) \qquad 3\sum \frac{m_i}{r_i^3}\cos^2\theta_i - \sum \frac{m_i}{r_i^3} > 0,$$

r_i désignant la distance OM_i. Lorsque tous les points sont dans un même plan, cette condition peut s'interpréter de la manière suivante. On porte, suivant une direction quelconque de ce plan, des longueurs OP_i proportionnelles à $\frac{m_i}{r_i^3}$. On prend le symétrique $\overrightarrow{OQ_i}$ de chaque vecteur $\overrightarrow{OP_i}$ par rapport à OM_i. Puis on fait la somme géométrique $\overrightarrow{OQ}$ des $\overrightarrow{OQ_i}$. Pour la stabilité, il faut et il suffit que la longueur de $\overrightarrow{OQ}$ soit inférieure au tiers de la somme des longueurs $\overrightarrow{OQ_i}$. En déduire que si les masses attirantes sont égales et situées aux sommets d'un polygone régulier, le centre de ce polygone est une position d'équilibre stable.

[Développer U suivant les puissances de x, y, z, en s'arrêtant au second ordre. En écrivant que les termes du second degré ont une somme négative, quels que soient x, y, z, on trouve la condition (1). Dans le cas où les points sont dans un même plan, évaluer les angles θ_i au moyen de l'angle polaire θ de OA. On arrive à une inégalité de la forme

$$A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C > 0,$$

qui doit être vérifiée quel que soit θ, ce qui exige $C^2 > A^2 + B^2$. A et B sont les composantes de $\overrightarrow{OQ}$. Dans le cas du polygone régulier, Q est en O.]

9. Un fil élastique a pour longueur naturelle 1^{m}. Il s'allonge de 38^{cm} sous l'action d'un poids de 100^{g}. On fixe ses deux extrémités en deux points A et B, situés sur une même horizontale, à $1^{m},25$ l'un de l'autre. Au milieu P du fil, on attache un poids de 150^{g}. Calculer la distance de la position d'équilibre à la droite AB, à 1^{cm} près.

10. On reprend le fil précédent et un autre fil identique, dont une

extrémité est fixée à 2m au-dessus du milieu de AB et l'autre extrémité attachée au point P. Position d'équilibre.

11. Un point pesant P est attaché à n fils élastiques, dont les autres extrémités sont fixes. Démontrer que toute position d'équilibre est stable. (Prendre cette position pour origine et développer la fonction des forces suivant les puissances de x, y, z, comme dans l'Exercice n° 8. Les termes du second degré sont toujours négatifs.)

12. Un point M est mobile, sans frottement, sur un cercle. Il est attaché à deux fils élastiques, fixés, d'autre part, en deux points A et A' diamétralement opposés du cercle. Les coefficients d'élasticité étant supposés égaux, mais les longueurs naturelles l et l' quelconques, trouver la position d'équilibre pour laquelle les deux fils sont tendus. Montrer qu'elle n'existe que si $l^2 + l'^2 < 4R^2$. Est-elle stable ?

13. Positions d'équilibre d'un point pesant pouvant glisser avec frottement sur un cercle dont le plan est incliné.

14. Même question, le cercle étant remplacé par une hélice circulaire. (La direction des tangentes aux extrémités des arcs d'équilibre peut être obtenue par l'intersection de deux cônes de révolution.)

15. Même question avec une parabole dont la tangente au sommet est horizontale et dont l'axe est incliné.

16. Un cercle, dont le plan est horizontal, tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical, qui passe à la distance a de son centre. Positions d'équilibre relatif d'un point pesant pouvant glisser avec frottement sur ce cercle. (Si $a < R \sin\varphi$, φ désignant l'angle de frottement, l'équilibre est indifférent, quel que soit ω. Si $a > R \sin\varphi$, l'équilibre est indifférent tant que ω ne dépasse pas une certaine limite. Au delà de cette limite, il y a deux arcs d'équilibre, ayant respectivement pour milieux les points le plus éloigné et le plus rapproché de l'axe.)

17. Équilibre relatif d'un point pesant pouvant glisser avec frottement sur une parabole qui tourne uniformément autour de son axe supposé vertical. (Les distances des positions limites à l'axe sont données par une équation du second degré.)

18. Équilibre avec frottement d'un point pesant sur un ellipsoïde ayant un axe vertical.

19. Même question avec un cône de révolution dont l'axe est incliné.

20. Quand un point est en équilibre à la surface de la Terre, son poids est la résultante de l'attraction de la Terre et de la force centrifuge due à la rotation de celle-ci autour de la ligne des pôles. Montrer que la verticale est déviée, par rapport au rayon terrestre, d'un angle égal à $\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{289}$, λ étant la latitude, et que l'accélération de la pesanteur est égale à $g\left(1-\frac{\sin^2\lambda}{289}\right)$, g désignant sa valeur à l'équateur.

21. Un corps solide est terminé par une calotte sphérique, par laquelle il repose sur un plan horizontal parfaitement poli. Quelle est la condition pour qu'il puisse se tenir en équilibre stable?

22. Un corps solide pesant est suspendu par deux fils AB, A′B′. Démontrer que, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la verticale du centre de gravité rencontre AA′ et passe par le point de rencontre des deux fils.

23. Une poutre de 4^{m} de long et pesant 340^{kg} est suspendue, par ses extrémités, à deux chaînes de 12^{m} de long fixées à deux points situés sur une même horizontale à $5^{m},50$ l'un de l'autre. Calculer les tensions des deux chaînes.

24. La ligne des gonds d'une porte fait l'angle i avec la verticale. Quelle force faut-il appliquer normalement à la porte pour la maintenir dans une position faisant l'angle φ avec la position d'équilibre stable? (Prendre la ligne des gonds pour axe des z et la position d'équilibre pour plan des zx.)

25. Une table repose par trois pieds A, B, C sur le plan horizontal. Elle supporte un poids P (y compris celui de la table), appliqué en un point projeté horizontalement en un point M dont les coordonnées trilinéaires normales (t. II, n° 155) par rapport au triangle ABC sont x, y, z. Calculer les pressions des trois pieds. (Prendre les moments résultants par rapport aux côtés du triangle.)

26. La table précédente est, en outre, soumise à une force horizontale F, de cote h, et projetée horizontalement suivant la bissectrice de l'angle A, le triangle ABC étant supposé équilatéral. Chercher les conditions d'équilibre, en supposant un même coefficient de frottement f pour les trois pieds. Dans quel cas la table bascule-t-elle et dans quel cas glisse-t-elle sur le plan horizontal? Calculer les pressions des pieds.

27. Un corps solide pesant, de poids P, peut tourner autour d'un axe horizontal. Chercher ses positions d'équilibre limite, en tenant compte du frottement des tourillons. (*Cf.* nº 142.)

28. Un volant de 4^t tourne à la vitesse de 110 tours par minute. Son centre de gravité se trouve à 1^{cm} de l'axe. Calculer les pressions sur les paliers, en supposant ceux-ci équidistants du plan de symétrie du volant et en supposant l'axe horizontal. Que deviennent ces pressions si l'on double la vitesse et si le centre de gravité est à 10^{cm} de l'axe? (La pression sur chaque palier est de 2270^{kg} dans le premier cas et de 12800^{kg} dans le second cas.)

29. Quel contrepoids faut-il placer à 2^m de l'axe pour équilibrer le volant précédent? (20^{kg} ou 200^{kg}.)

30. Une poutre horizontale, de poids p, repose sur trois appuis équidistants. Elle supporte une charge P placée à la distance x du milieu. Calculer les réactions des trois appuis, en supposant que chacun d'eux fléchit d'une quantité proportionnelle à la pression qu'il supporte et que la poutre reste rectiligne. (*Cf.* Exercice résolu nº 6.)

31. Une trappe en fer, de 2^m de long, $1^m,20$ de large et 4^{mm} d'épaisseur, est maintenue soulevée de l'angle θ, au moyen d'une chaîne dont une extrémité est attachée au milieu du bord opposé à la charnière et dont l'autre extrémité est fixée en un point situé à $1^m,35$ au-dessus du sol et à $0^m,20$ en arrière de la charnière. Calculer la tension de la chaîne, ainsi que les réactions des deux gonds, pour des valeurs de θ échelonnées de 10°, depuis 0° jusqu'à 90°. Construire le graphique indiquant les variations de la tension de la chaîne.

32. Deux tiges CA et CB, de longueurs $2a$ et $2b$ et de poids p et q, sont soudées en C, de manière à former un angle 2φ. Aux extrémités A et B, on attache des poids P et Q. On place le système ainsi obtenu sur une sphère parfaitement polie, de telle manière que les deux tiges soient tangentes. Chercher la position d'équilibre et dire si elle est stable. (Le centre de gravité G doit être sur la verticale du centre O de la sphère. Les diamètres aboutissant aux points de contact forment quatre angles; pour qu'il puisse y avoir équilibre stable, il faut et il suffit que G soit dans celui qui est opposé par le sommet à l'angle qui contient C.)

33. Équilibre d'une échelle appuyée sur un sol horizontal et contre un mur vertical, les coefficients de frottement étant f sur le sol et f' sur le mur.

[On peut se borner à chercher l'inclinaison de l'échelle au moment du démarrage et admettre que les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles l'inclinaison est moindre que cette inclinaison limite. Si l'on veut traiter la question en toute rigueur, il faut suivre la méthode générale du n° 132. Appelons x et y les rapports de la réaction tangentielle à la réaction normale en A sur le sol, et en B sur le mur. En éliminant les composantes normales entre les trois équations d'équilibre, on arrive à l'équation

$$x(by + z) + a = 0, \tag{1}$$

en appelant a et b les distances du centre de gravité G à A et à B et posant

$$z = (a + b)\operatorname{tang}\alpha,$$

α désignant l'angle de l'échelle avec le plan horizontal. En outre, pour que les réactions normales soient positives, il faut et il suffit que x soit négatif. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une valeur de x comprise entre o et $-f$ et une valeur de y comprise entre $-f'$ et f' satisfaisant à l'équation (1). Il est commode d'interpréter géométriquement, en considérant x et y comme des coordonnées. L'équation (1) représente une hyperbole équilatère, qui doit avoir au moins un point à l'intérieur d'un certain rectangle. On trouve facilement que la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$z > \frac{a - bff'}{f}. \tag{2}$$

Si elle est remplie, il y a tout un arc donnant des valeurs acceptables pour x et y. La détermination des valeurs effectives que prennent ces quantités dans l'équilibre ne peut se faire qu'en faisant intervenir l'élasticité de l'échelle. *Cf.* n° 142.]

34. L'échelle précédente étant placée dans une position quelconque, on la fixe au moyen d'une corde, qui relie un de ses points C au point O commun au sol, au mur et au plan de symétrie de l'échelle. Calculer la tension de la corde, en supposant d'abord qu'il n'y a pas frottement, puis que l'échelle est sur le point de glisser, soit dans un sens, soit dans l'autre. [Lorsqu'il n'y a pas frottement, la question est très simple; on trouve que C doit être dans la moitié inférieure de l'échelle, pour que la tension soit positive. Quand il y a frottement, on trouve, en adoptant

les notations de l'exercice précédent,

$$T = P\frac{m\,xy\cos\alpha + x\sin\alpha + n\cos\alpha}{y\cos\alpha\cos\varphi - x\sin\alpha\sin\varphi + \sin(\alpha-\varphi)},$$

en posant $\frac{BG}{BA} = m$, $\frac{AG}{AB} = n$, $\widehat{AOC} = \varphi$, et appelant P le poids de l'échelle. Il ne reste plus ensuite qu'à remplacer dans cette formule x par $-f$ et y par f' ou bien x par f et y par $-f'$.]

35. On suppose que le cadre de l'Exercice résolu n° 9 est attaché au mur par deux ficelles OC et OA. Calculer les tensions de ces ficelles et examiner dans quelles conditions elles sont positives.

36. Une échelle double AOB repose, par ses pieds A et B, sur un sol horizontal. Ses deux parties sont reliées par une corde horizontale A'B', de masse négligeable. On appelle P le poids de OA, appliqué à la distance p du sommet O et, de même, Q le poids de OB, appliqué à la distance q.

1° Calculer la tension de la corde, en négligeant les frottements.

2° Déterminer les positions d'équilibre de l'échelle, en tenant compte des frottements en A et B et en supposant que la corde n'existe pas et que OA = OB.

[Écrire les conditions universelles pour l'échelle complète; puis, prendre les moments par rapport à O pour OA et OB séparément, en introduisant les angles avec la verticale. Pour 2°, si x et y désignent les rapports de la force de frottement à la réaction normale en A et B, la force de frottement en chaque pied étant comptée positivement vers l'autre pied, on trouve qu'on peut poser

$$(1)\quad \begin{cases} x = tA, & y = tB, \\ A = P(a-p) + Q(a+q), & B = P(a+p) + Q(a-q). \end{cases}$$

On trouve ensuite, en posant $\widehat{AOB} = 2\alpha$,

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\alpha = t\frac{AB}{P(a-p) + Q(a-q)}.$$

Dès que t atteint $\frac{f}{A}$ ou $\frac{f}{B}$, le pied A ou B glisse.]

37. Calculer le couple de pivotement (n° 136), en supposant que l'aire de contact est un cercle et que la pression est uniforme.

38. Même question, en supposant que l'aire de contact est une ellipse et que la pression p en M est une fonction du rapport $t = \frac{OM}{OP}$, P désignant l'extrémité du demi-diamètre OM.

(Considérer l'ellipse comme la projection d'un cercle, pour évaluer l'aire élémentaire $ab t\,dt\,d\varphi$, φ désignant l'anomalie excentrique. Le couple élémentaire correspondant au secteur d'ouverture $d\varphi$ est

$$dC = f ab \rho\, d\varphi \int_0^1 pt^2\, dt,$$

ρ désignant le demi-diamètre OP. Le couple total se ramène au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

qui est égale à la longueur de l'ellipse, comme on le voit en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$.)

39. Pour faire rouler horizontalement un madrier de poids P, on le pose sur n rouleaux perpendiculaires au madrier, de rayon commun R et de poids commun p. Calculer la force horizontale F avec laquelle il faut tirer sur le madrier, connaissant les coefficients de frottement de roulement h et h' de chaque rouleau sur le madrier et sur le sol. Application numérique :

$$P = 300^{kg}, \qquad n = 3, \qquad p = 18^{kg}, \qquad R = 8^{cm},$$
$$h = 1^{mm},5, \qquad h' = 4^{mm}.$$

[Appelons Y et Y′ les réactions normales du sol et du madrier sur un rouleau, X et X′ les réactions tangentielles évaluées positivement dans le sens de F, C et C′ les couples de roulement exercés par le sol et par le madrier sur le rouleau. Écrire les trois conditions universelles pour le rouleau et les équations $C = hY$, $C' = h'Y'$; puis, éliminer X′, Y′, C′, C. On obtient ainsi une équation, que l'on ajoute à toutes les équations analogues données par les n rouleaux. En tenant compte des équations universelles appliquées au madrier, on obtient

$$2RF = P(h + h') + nph'.]$$

40. Une tige est posée sur un plan incliné sur lequel elle peut glisser,

avec frottement, en pivotant autour d'une de ses extrémités O. Déterminer ses positions d'équilibre, en admettant que la pression qu'elle exerce sur le plan est répartie uniformément. [Prendre les moments par rapport à O. On trouve que l'angle de la tige avec la ligne de plus grande pente ne doit pas dépasser arc sin$(f \cot i)$.]

41. En chaque point M d'un corps solide, on applique une force F, de direction et de grandeur déterminées. Chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire toutes ces forces pour qu'elles se fassent équilibre, quelle que soit l'orientation du corps solide (*équilibre astatique*).

(Prendre un trièdre fixe $Oxyz$ et un trièdre $Ox'y'z'$ lié au corps solide. Si X, Y, Z sont les composantes de F suivant $Oxyz$, on doit avoir

$$(1) \qquad \Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0;$$

puis, en appliquant les formules du changement de coordonnées,

$$(2) \qquad b\Sigma x'Z + b'\Sigma y'Z + b''\Sigma z'Z = c\Sigma x'Y + c'\Sigma y'Y + c''\Sigma z'Y,$$

et les deux formules analogues. Ceci doit avoir lieu, quelle que soit l'orientation de $Ox'y'z'$. Des conditions évidemment suffisantes sont que les neuf quantités

$$\begin{array}{lll} \Sigma x'X, & \Sigma y'X, & \Sigma z'X, \\ \Sigma x'Y, & \Sigma y'Y, & \Sigma z'Y, \\ \Sigma x'Z, & \Sigma y'Z, & \Sigma z'Z \end{array}$$

soient toutes nulles. On démontre qu'elles sont nécessaires, en prenant d'abord $Ox'y'z'$ suivant $Oxyz$, puis en le faisant tourner de π autour de Oz.)

42. Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible homogène pesant, suspendu par ses deux extrémités. (Admettre que c'est une ligne plane. Si l'axe des x est horizontal et l'axe des y vertical et dirigé vers le haut, on a, en appelant α l'angle polaire de la tangente,

$$T\cos\alpha = a, \qquad T\sin\alpha = \rho g s,$$

a désignant une constante et ρ la densité linéaire. En éliminant T, on est ramené au Chapitre XXIV du Tome II.)

43. On suppose qu'un fil flexible homogène est en équilibre sous l'action de certaines forces. On le fait glisser sur lui-même, de manière

qu'il dessine toujours la même courbe dans l'espace, chacun de ses points ayant une vitesse constante v. Montrer que l'équilibre relatif persiste, la tension en chaque point étant simplement augmentée de la quantité constante ρv^2, ρ désignant la densité linéaire.

[Prendre les équations intrinsèques (n° 148), en ajoutant aux forces données les forces d'inertie. La force d'inertie appliquée à chaque élément est $-\rho \vec{\gamma}\, ds$. Ses composantes intrinsèques sont données par le n° 8. On peut aussi calculer l'accroissement de tension, en appliquant le théorème de la projection des quantités de mouvement (n° 95) à une portion quelconque du fil.]

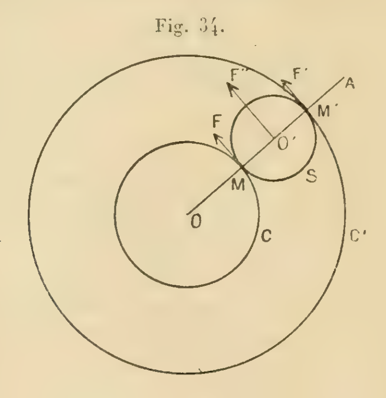
CHAPITRE X.

APPLICATIONS DE LA STATIQUE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère le dispositif de l'Exercice proposé n° 21 du Chapitre III (fig. 34). On applique un couple* C *à la roue* (C), *un couple* C'

Fig. 34.



à la roue (C') *et un couple* A *au porte-satellite* (A).

1° *Trouver les conditions d'équilibre, en négligeant les frottements. Calculer l'effort* F *sur chaque dent.*

2° *On suppose que le système tourne uniformément. Évaluer le rapport* x *entre le travail absorbé par le frottement du satellite sur son axe et le travail utile, en supposant que l'on fixe une quelconque des pièces, les deux autres devenant l'une motrice et l'autre résistante.*

3° *On rend* A *solidaire de la roue arrière d'une bicyclette,* C *étant fixé au cadre et* C' *au pignon moteur. Calculer* F *et* x, *en supposant que le poids total de la bicyclette est* P *et qu'elle monte une pente* p, *avec une faible vitesse.*

4° *On fixe* A *au cadre,* C' *à la roue et* C *au pignon moteur. Faire les mêmes calculs que dans* 3°.

Application numérique : $P = 100^{kg}$, $p = 0,15$; $R' = 2R = 35^{mm}$; *dia-*

mètre de la roue arrière : 70^{cm}; *diamètre de l'axe du satellite :* 6^{mm}; *coefficient de frottement du satellite sur cet axe :* 0,1.

1° Appliquons le théorème des travaux virtuels. Soient c, c' et a les vitesses angulaires des trois pièces. Elles sont liées par la relation (*cf.* exercice précité) :

$$Rc + R'c' - (R + R')a = 0. \tag{1}$$

Un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons donne lieu à des vitesses virtuelles satisfaisant à cette équation. Les travaux virtuels correspondants sont proportionnels à Cc, $C'c'$, Aa. La somme de ces travaux devant être nulle, on doit avoir

$$Cc + C'c' + Aa = 0 \tag{2}$$

et cette équation doit être vérifiée pour tout système de valeurs de c, c', a satisfaisant à (1). Il revient au même de dire que les équations (1) et (2) doivent être équivalentes par rapport aux variables c, c', a. Autrement dit, leurs coefficients doivent être proportionnels :

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \frac{-A}{R+R'}. \tag{3}$$

Telles sont les conditions d'équilibre. Elles donnent deux des couples, connaissant le troisième.

Soit maintenant F la réaction de C sur S, que nous supposerons tangente à C, pour simplifier. En annulant le moment résultant des forces appliquées à C par rapport à l'axe O, nous avons

$$C = FR. \tag{4}$$

De même, la réaction F' de C' sur S est donnée par

$$C' = F'R'. \tag{5}$$

Enfin, la réaction F'' du satellite sur son axe satisfait à l'équation

$$A = -F''\frac{R+R'}{2}. \tag{6}$$

En annulant maintenant le moment par rapport à O' et la somme géométrique des forces appliquées au satellite, il vient

$$F = F' = \frac{F''}{2}. \tag{7}$$

En portant dans (4) et (5), on retrouve (3). Quant à l'effort F, il est *égal à la valeur commune des trois rapports* (3). S'il y avait m satellites, l'effort sur chacun d'eux serait $\frac{F}{m}$, en supposant tous ces efforts égaux.

Tous ces résultats sont valables, quand les différentes pièces tournent uniformément (n° 121).

2° Si, comme cela a lieu dans la pratique, le coefficient de frottement du satellite sur son axe est petit, la réaction normale est sensiblement F'' et la force de frottement fF'' (n° 156). Si s désigne la vitesse angulaire du satellite et r le rayon de l'axe, *le travail absorbé par le frottement pendant l'unité de temps est* $fF''r(s-a)$, car le travail total des forces intérieures est indépendant du trièdre de référence (n° 102) et on peut le calculer en prenant ce trièdre solidaire de A. On a, d'autre part,

$$(8) \qquad (s-a)\frac{R'-R}{2} = R'(c'-a) = -R(c-a).$$

Les formules (7) et (3) ne sont plus tout à fait exactes, car le moment de F'' par rapport à O' n'est pas tout à fait nul ou, si l'on veut, le travail total des couples C, C', A n'est pas tout à fait nul, puisqu'il est égal au travail du frottement. Toutefois, on peut pratiquement continuer à les appliquer, pour l'évaluation du rapport x, car ce rapport est proportionnel à f et, par suite, ne peut pas être connu avec une grande précision. Il est donc sans importance de le modifier légèrement, en faisant l'approximation ci-dessus.

Premier cas : on fixe C. — On a, en tenant compte de (8),

$$(9) \qquad c = 0, \qquad s-a = \frac{2Ra}{R'-R}.$$

Le travail utile est Aa. Donc

$$(10) \qquad x = \frac{fF''r\dfrac{2Ra}{R'-R}}{Aa} = \frac{4frR}{R'^2-R^2},$$

en tenant compte de (6) et ne s'occupant que des valeurs absolues.

Deuxième cas : on fixe C'. — On a, en utilisant (8),

$$(11) \qquad c' = 0, \qquad s-a = -\frac{2R'a}{R-R}.$$

Le travail utile est encore Aa. Donc

$$(12) \qquad x = \frac{4frR'}{R'^2-R^2}.$$

Troisième cas : on fixe A. — On a, en se servant de (8),

$$(13) \qquad a = 0, \qquad s - a = \frac{2R'c'}{R' - R}.$$

Le travail utile est $C'c'$. Donc

$$(14) \qquad x'' = \frac{fF''r.2R'c'}{C'c'(R' - R)} = \frac{4fr}{R' - R},$$

en tenant compte de (7) et (5).

En comparant (10), (12), (14), on voit que

$$(15) \qquad \frac{x}{R} = \frac{x'}{R'} = \frac{x''}{R + R'}.$$

On a donc

$$(16) \qquad x < x' < x'',$$

ce qui permet de *comparer les rendements des trois dispositifs.*

3° Le travail utile pendant l'unité de temps est Aa. Ce travail élève le poids P d'une hauteur égale à $pR''a$, en appelant R'' le rayon de la roue arrière. On a donc

$$(17) \qquad Aa = PpR''a, \qquad A = PpR''.$$

Soit $R' = nR$. On a, d'après 1° et 2° (premier cas),

$$(18) \qquad F = \frac{A}{R + R'} = Pp\,\frac{n}{n + 1}\,\frac{R''}{R'},$$

$$(19) \qquad x = 4f\,\frac{n}{n^2 - 1}\,\frac{r}{R'}.$$

D'après (1), le rapport des vitesses angulaires de la roue et du pignon moteur est $\frac{a}{c'} = \frac{n}{n + 1}$. La *démultiplication* est

$$(20) \qquad D = 1 - \frac{a}{c'} = \frac{1}{n + 1}.$$

Avec les données numériques, on trouve

$$(21) \qquad F = 100^{kg}, \qquad x = 0,023, \qquad D = \frac{1}{3}.$$

4° Le travail utile est $C'c'$. On en déduit, comme ci-dessus,

$$(22) \qquad C' = PpR'';$$

d'où, en utilisant 1° et 2° (troisième cas),

$$F = \frac{C'}{R'} = Pp\,\frac{R''}{R'}, \tag{23}$$

$$x'' = 4f\,\frac{n}{n-1}\,\frac{r}{R'}. \tag{24}$$

La démultiplication est

$$D = \frac{n-1}{n}; \tag{25}$$

mais, il faut remarquer que c et c' sont de signes contraires; par conséquent il faut rétropédaler.

Avec les données numériques, on trouve

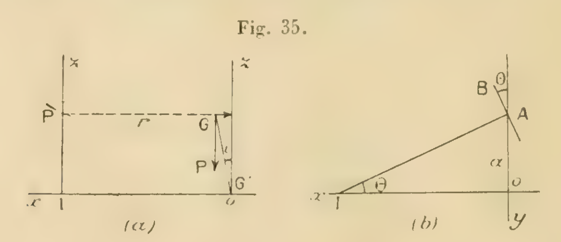
$$F = 150^{kg}, \qquad x'' = 3x = 0,068, \qquad D = \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Dans la pratique, on emploie trois ou quatre satellites; l'effort sur chacun d'eux est alors de 33^{kg} ou 25^{kg} dans le premier cas et de 50^{kg} ou $37^{kg},5$ dans le second cas.

La perte de travail est de un peu plus de 2 pour 100 avec le premier dispositif et de presque 7 pour 100 avec le second. Elle est suffisamment appréciable pour justifier l'emploi de roulements à billes dans les satellites.

2. *Équilibre de la bicyclette.* — Il s'agit d'un *équilibre relatif*, par rapport au trièdre de référence $Oxyz$ (*fig.* 35), dont l'axe Oy est la

Fig. 35.



trace horizontale du plan du cadre, orientée, par exemple, en sens inverse de la marche; Oz est vertical et dirigé vers le haut; Ox est perpendiculaire à yOz; enfin, l'origine O est le point de contact de la roue arrière avec le sol, qui est supposé horizontal. Ce trièdre est animé d'un mouvement plan (n° 41); soit Iz son axe instantané de rotation. Supposons cet axe fixe et la vitesse angulaire constante; autrement dit, *le cycliste effectue un virage,* de rayon $IO = R$, avec une vitesse uniforme $v = R\omega$.

Les forces relatives au trièdre $Oxyz$ sont les forces de pesanteur, les forces centrifuges et les réactions du sol. Les forces de pesanteur ont pour résultante le poids total P, appliqué au centre de gravité G, que nous supposerons, pour simplifier, dans le plan du cadre. Si le rayon R est assez grand par rapport aux dimensions de la bicyclette, on peut admettre, sans erreur sensible (n° 138), que les forces centrifuges ont également une résultante appliquée en G et égale à $m\omega^2\overrightarrow{PG}$, m désignant la masse totale $\frac{P}{g}\cdot$ On peut confondre pratiquement la distance PG avec R et la force centrifuge est alors égale à $\frac{Pv^2}{Rg}\cdot$ Quant aux réactions du sol, elles sont appliquées aux points de contact des deux roues. L'un de ces points est O; l'autre est toujours à une distance très faible de Oy; nous pouvons donc considérer les réactions comme appliquées en des points de Oy. La condition d'équilibre s'obtient alors en annulant le moment résultant du poids et de la force centrifuge par rapport à Oy. Or, ce moment est, en appelant b la distance de G à Oy,

$$(1)\qquad M = bP\left(\sin i - \frac{v^2}{Rg}\cos i\right).$$

La condition d'équilibre est donc

$$(2)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{v^2}{Rg}\cdot$$

Si elle est remplie, les deux forces admettent une résultante dirigée suivant la perpendiculaire GG' à Oy et les deux réactions du sol, qui doivent former un système nul avec cette résultante, ont la direction G'G. Pour qu'il n'y ait pas glissement des roues sur le sol (*dérapage*), il faut et il suffit que l'angle i soit inférieur à l'angle de frottement, c'est-à-dire que l'on ait

$$(3)\qquad \frac{v^2}{Rg} < f, \qquad v < \sqrt{Rgf}.$$

L'équilibre n'est donc possible que si la vitesse ne dépasse pas une certaine *vitesse critique*, qui est d'autant plus petite que R est plus petit, c'est-à-dire que le virage est plus court. Si cette vitesse est dépassée, il y a dérapage.

L'équilibre est instable. En effet, si i devient plus grand que la valeur i' donnée par (2), la formule (1) montre que le moment M devient positif; donc, i augmente. De même, si $i < i'$, M est négatif, i diminue. Dans les deux cas on s'éloigne de la position d'équilibre.

On peut remarquer que M est proportionnel à b : donc, *on diminue l'instabilité en abaissant le centre de gravité.*

Usage du guidon. — Voyons maintenant quelle est l'influence du guidon sur l'équilibre. Soit AB la trace horizontale de la roue avant, A étant le point de contact (*fig.* 35, *b*). La figure OAB tourne autour du point I. De plus, comme chaque roue roule sans glisser sur le sol (si elle ne dérape pas), elle est tangente à la trajectoire de son point de contact. Il s'ensuit (n° 42) que les normales, en O à OA et en B à AB passent par I. (Nous l'avions déjà admis implicitement pour la normale en O.) On a dès lors, dans le triangle rectangle IOA,

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{a}{R},$$

en appelant a la distance constante OA.

Cette formule nous montre que *c'est l'angle dont a tourné le guidon qui détermine le rayon de courbure du virage.* Comme ce rayon de courbure joue un rôle fondamental dans l'équilibre, il en est de même pour le guidon.

Éliminons R entre (4) et les formules (1) et (2) :

$$\text{(5)} \qquad M = bP\left(\sin i - \frac{v^2}{ga}\operatorname{tang}\theta\cos i\right);$$

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang} i = \frac{v^2}{ga}\operatorname{tang}\theta.$$

Il est facile de comprendre maintenant *comment il faut manœuvrer pour rétablir l'équilibre*, lorsque celui-ci est rompu. Supposons que, le cycliste roulant en ligne droite, le cadre s'incline accidentellement vers la gauche d'un certain angle i_0. Le moment M devient positif puisque θ est nul. Donc, si le cycliste ne réagit pas, il tombe vers la gauche. S'il tourne son guidon vers la droite, comme le font les débutants, il ne fait qu'augmenter M; il accélère sa chute. Si, au contraire, il tourne son guidon vers la gauche, il diminue M et, s'il le tourne assez rapidement, il arrive à le rendre négatif avant que le dérapage se soit produit. A partir de ce moment, la vitesse de chute se ralentit; elle finit par s'annuler et la bicyclette se redresse; la chute est évitée.

La formule (5) montre que, pour une valeur donnée de θ, M diminue d'autant plus que v est plus grand et a plus petit. Donc, *les mouvements du guidon pour rétablir l'équilibre doivent être d'autant plus petits que la vitesse est plus grande* et la bicyclette plus courte. La première propriété est bien connue des cyclistes, qui savent que les écarts du

guidon sont toujours très faibles aux grandes vitesses. C'est ce qu'on exprime aussi quelquefois en disant que la bicyclette est d'autant plus stable qu'elle va plus vite. Ceci est parfaitement exact, à condition que le guidon soit manié avec une grande souplesse. Supposons, en effet, que, la bicyclette roulant en ligne droite à grande vitesse, le guidon prenne brusquement un écart accidentel assez grand (provoqué, par exemple, par un caillou), vers la gauche, pour fixer les idées. D'après la formule (5), M prend une grande valeur négative et la bicyclette s'incline rapidement vers la droite. Pour rétablir son équilibre, le cycliste tourne brusquement son guidon à droite. Mais, s'il dépasse la mesure, M prend une grande valeur positive et la machine s'incline rapidement vers la gauche. Après quelques oscillations, le cycliste se redressera, s'il dirige avec souplesse et ne perd pas son sang-froid; sinon, il finira par être projeté violemment sur le sol, soit d'un côté, soit de l'autre.

En résumé, *aux faibles vitesses, la bicyclette est instable par rapport à la pesanteur,* les chutes étant occasionnées par une inclinaison accidentelle du cadre, comme pour une chute au repos. *Aux grandes vitesses*, au contraire, *la bicyclette est instable par rapport à la force centrifuge*, les chutes étant occasionnées par une trop grande déviation du guidon.

3. *La grue représentée par la figure* 36 *doit soulever une charge* Q *de* 10^t. *Le câble s'enroule sur le tambour* T, *passe sur la poulie fixe* A, *puis dans un palan de six poulies et enfin vient s'attacher à l'extrémité de* AB. *La charge* Q *est suspendue à la moufle inférieure du palan. L'enroulement sur le tambour* T *se fait par l'intermédiaire d'un train d'engrenages. La roue* R, *solidaire de* T, *engrène avec* r, *laquelle est solidaire de* R', *qui engrène avec* r'; *enfin*, r' *est solidaire de la manivelle* m, *à l'extrémité de laquelle s'exerce normalement la force* P.

1° *Calculer la force* P *nécessaire pour élever* Q *d'un mouvement uniforme, en négligeant les frottements.*

2° *Les barres* OA, AB, CD, AE *étant supposées articulées en* O, A, C, D, E, *calculer les réactions aux articulations. Calculer l'effort de tension ou de compression subi par chaque barre et calculer l'aire minima que doit avoir sa section, sachant que la charge pratique de sécurité est de* 600^{kg} *par centimètre carré.*

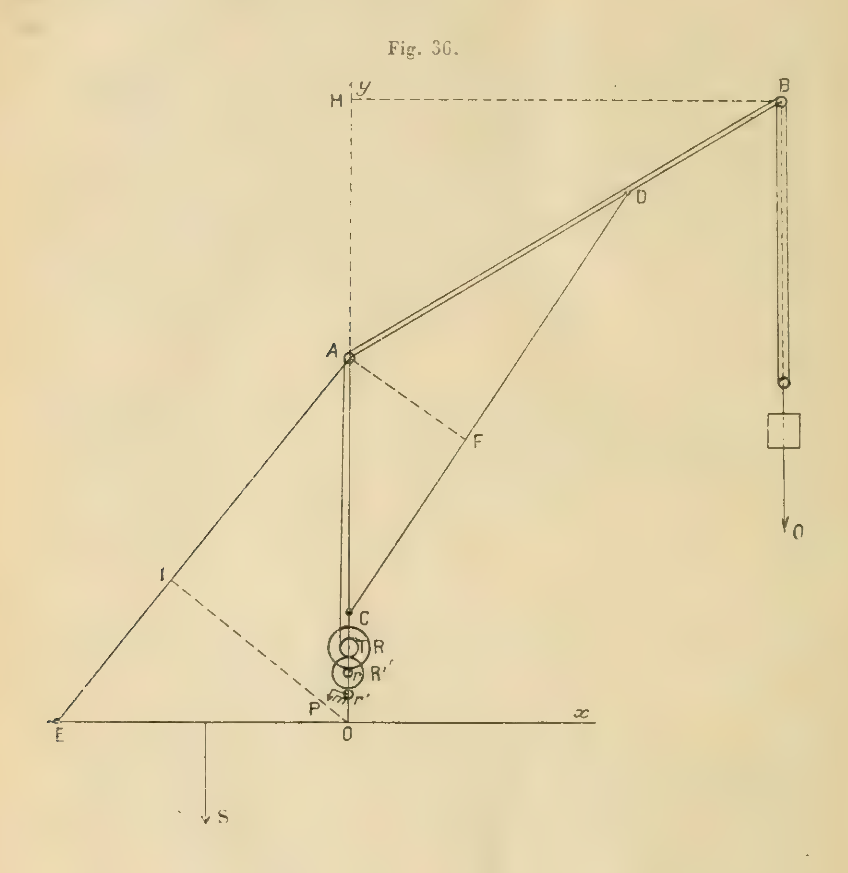
3° *Quelle charge doit-on répartir uniformément sur la longueur* OE *pour que la grue ne bascule pas autour du point* O?

On négligera les poids des barres, poulies, câble, etc.

Les dimensions sont les suivantes : OA $= 5^m$, AB $= 6^m$, AD $= 4^m,5$,

$AC = 3^m.5$, $CD = 7^m$, $OE = 4^m$; *diamètre du tambour* T : 30^{cm}; *longueur de la manivelle* : 40^{cm}; *les roues* R *et* R′ *ont chacune* 90 *dents et les roues* r *et* r' *ont chacune* 15 *dents.*

Fig. 36.



1° Appliquons la *méthode des travaux virtuels.* Nous allons, par exemple, égaler les travaux de P et de Q pour un tour complet du tambour. La roue r fait 6 tours et r' en fait 36. Le travail de P est donc égal à

$$P \times 36 \times 2\pi \times 40 \text{ kilogrammes} \times \text{centimètre.}$$

La longueur de câble enroulée est de 30πcm. C'est la diminution totale de longueur des six brins du palan. Chaque brin diminue donc de 5πcm. Le travail de Q est, par suite, $Q \times 5\pi = 50000\pi$. On a donc l'équation

$$P \times 36 \times 2\pi \times 40 = 50000\pi;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{5000}{288} = 17^{kg},3.$$

2° La barre CD est soumise aux réactions des points C et D. Comme nous négligeons son poids, ces deux réactions doivent former un système nul; autrement dit, elles doivent être égales et opposées et dirigées suivant CD. Appelons R la réaction de D sur CD, comptée positivement suivant le sens DC, c'est-à-dire si la barre est comprimée.

Considérons maintenant la barre AB. Elle est soumise aux tensions des sept brins qui aboutissent en B; les six premières ont pour résultante le poids Q; la septième est égale à $\frac{Q}{6}$ et a la direction BA. La barre AB est également soumise à la réaction R de CD et à la réaction du point A. Prenons le moment résultant par rapport à ce point, en négligeant toujours le poids de la barre, ainsi que le moment de la tension du brin AB (à cause de la petitesse du rayon de la poulie A) [1]:

$$Q \times BH = R \times AF;$$

d'où

$$(1) \qquad R = Q\frac{BH}{AF}.$$

Cette réaction est positive; donc *la barre* CD *est comprimée*.

Écrivons maintenant que la somme géométrique des forces appliquées à AB est nulle; cela nous donne les composantes X et Y (suivant les axes indiqués sur la figure) de *la réaction de* A *sur cette barre :*

$$(2) \qquad X = -R\sin C + \frac{Q}{6}\sin A = -Q\left(\frac{BH}{AC} - \frac{\sin A}{6}\right),$$

$$(3) \qquad Y = -R\cos C + \frac{Q}{6}\cos A + Q = Q\left(1 + \frac{\cos A}{6} - \frac{BH}{AC}\cot C\right),$$

en désignant par C et A les angles ACD et HAB et en tenant compte de (1) et de la relation évidente

$$(4) \qquad AF = AC\sin C.$$

[1] Nous admettons que le moment de la réaction du point A est nul; ceci est permis, parce que nous supposons que la barre AB est articulée en A, c'est-à-dire qu'elle peut tourner librement autour de ce point. Si elle était, au contraire, encastrée dans OA, les réactions élastiques développeraient un couple de flexion, qui devrait entrer dans notre équation des moments.

Si nous considérons maintenant la barre AE, elle subit, en A et E, des réactions égales et opposées, ainsi qu'on le voit en répétant le raisonnement fait pour CD. Soit T la réaction en A, comptée positivement suivant EA, c'est-à-dire si la barre est tendue. Appliquons les équations universelles au système formé par toute la grue, à l'exception de la barre AE. Prenons d'abord les moments par rapport à O, en remarquant que la réaction en O a un moment nul, puisque nous avons une articulation :

$$Q \times BH = T \times OI;$$

d'où

$$(5)\qquad T = Q.\frac{BH}{OI}.$$

Nous obtenons un résultat positif; donc *la barre* AE *est tendue.*

Si nous projetons maintenant sur Ox et Oy, nous obtenons les composantes de la *réaction de* O *sur* OA :

$$(6)\qquad X' = T\cos E = Q.\frac{BH}{OA},$$

$$(7)\qquad Y' = Q + T\sin E = Q\left(1 + \frac{BH}{OE}\right).$$

Il nous reste à calculer les tensions des tiges AB et OA.

Sur DB, *nous avons une compression*, qui est la somme des projections des tensions du câble sur BD, soit

$$(8)\qquad C = Q\cos A + \frac{Q}{6}.$$

Sur AD, nous avons la force précédente, diminuée de la projection de R sur AB; cela nous donne *une tension*

$$(9)\qquad T' = R\cos D - Q\cos A - \frac{Q}{6}.$$

Comme vérification, elle doit être égale à la projection de la réaction (X, Y) sur DA, soit $-X\sin A - Y\cos A$. C'est ce qu'il est aisé de constater, en observant que $A - C = D$.

Il convient de remarquer que *la barre* AB *n'est pas seulement soumise à des efforts longitudinaux*, mais aussi à des efforts tranchants et à des moments fléchissants (*cf.* Exercice proposé n° 45).

La compression sur AC est la somme algébrique des projections sur AC de la tension T de AE, de la réaction de AB et de la réaction de

la poulie, soit

$$(10)\quad C' = T\sin E + Y + \frac{Q}{6}(1-\cos A) = Q \times \frac{BH}{OE} + Y + \frac{Q}{6}(1-\cos A).$$

La compression sur TC est égale à la précédente augmentée de la projection de R, soit

$$(11)\qquad C'' = C' + R\cos C.$$

Enfin, *la compression sur* OT est égale à $C'' - \frac{Q}{6}$, car la réaction du tambour T a pour composante verticale la tension du brin AT; nous négligeons, d'autre part, la force appliquée à la manivelle. Comme vérification, cette dernière compression doit être égale à la composante Y′ de la réaction en O. C'est ce que le lecteur vérifiera aisément, en se servant des formules (1), (3), (7).

Remarquons encore que, dans ses différentes parties, OA *est soumis à des efforts tranchants et à des moments fléchissants.*

Nous avons maintenant les formules donnant les efforts demandés; il ne nous reste plus qu'à faire les calculs numériques.

Le triangle ACD, dont on connaît les trois côtés, nous donne

$$\cos A = \frac{\overline{7}^2 - \overline{3,5}^2 - \overline{4,5}^2}{2\times 3,5\times 4,5} = 0,524, \qquad \sin A = 0,852, \qquad A = 58^{\circ}24';$$

puis

$$BH = 6\sin A = 5,11;$$

puis

$$\sin C = \sin A\,\frac{4,5}{7} = 0,548, \qquad C = 33^{\circ}13', \qquad \cos C = 0,837;$$

$$AF = 3,5\times 0,548 = 1,92.$$

Portant dans (1), il vient

$$R = 10000\,\frac{5,11}{1,92} = 26700^{kg}.$$

La section de CD doit donc avoir une aire au moins égale à $\frac{267}{6} = 45^{cm^2}$.

Les formules (2) et (3) nous donnent ensuite

$$X = -10000(1,46 - 0,142) = -13200^{kg},$$

$$Y = -22400 + 870 + 10000 = -11500^{kg}.$$

Le triangle rectangle OAE nous donne ensuite

$$OI = \frac{20}{\sqrt{16+25}} = \frac{20}{\sqrt{41}}.$$

Portant dans (5), on trouve

$$T = 10000 \frac{5,11 \times \sqrt{41}}{20} = 16400^{kg}.$$

La section de AE doit être de $\frac{164}{6} = 28^{cm^2}$.

Les formules (6) et (7) donnent ensuite

$$X' = 10000 \frac{5,11}{5} = 10200^{kg}, \qquad Y' = 22800^{kg}.$$

La formule (8) nous donne $C = 6900^{kg}$. La section de DB doit avoir au moins 12^{cm^2}.

L'angle $D = A - C = 25°11'$;

$$\cos D = 0,905, \qquad R\cos D = 24100, \qquad T' = 17200.$$

La section de AD doit avoir au moins 29^{cm^2}.

Ces deux sections *devraient d'ailleurs être augmentées*, surtout au voisinage du point D, *pour tenir compte des efforts de flexion.*

Les formules (10) et (11) nous donnent ensuite

$$C' = 2100^{kg}, \qquad C'' = 24500^{kg};$$

et enfin la compression sur OT est

$$C''' = 22800^{kg} = Y'.$$

Les aires des sections doivent être au moins égales respectivement à 4^{cm^2}, 41^{cm^2}, 38^{cm^2}. Elles devraient d'ailleurs être majorées pour tenir compte des efforts de flexion.

3° Le moment de la charge S demandée par rapport à O doit être égal au moment de Q. Donc

$$2S = 5,11\,Q, \qquad S = 25600^{kg}, \qquad \text{soit } 26\ t.$$

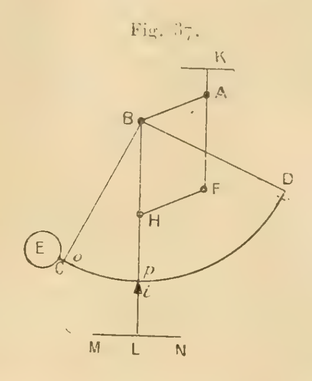
EXERCICES PROPOSÉS.

1. Une soupape de sûreté a 65^{mm} de diamètre et pèse $2^{kg},5$. Quand la pression dépasse 7^{kg} par centimètre carré, elle doit soulever un levier horizontal pesant 6^{kg}, dont le point fixe O est de 60^{mm} à droite du centre de la soupape et dont le centre de gravité est à 30^{cm} à gauche de O. Quel poids doit-on fixer au levier, à 70^{cm} à gauche de O?

2. Le pèse-lettre représenté par la figure 37 est constitué par un levier

coudé ABC, dont le point fixe est B. Le plateau K est solidaire de la tige AF, qui demeure verticale, grâce au parallélogramme articulé AFHB. Le levier entraîne un arc de cercle CD, terminé par la masse E et portant une graduation, qui se déplace devant l'aiguille i fixée au sup-

Fig. 37.



port BL. Quand le plateau est vide, l'aiguille est au zéro. Quand on met un poids P, l'aiguille se trouve devant la division P, telle que l'angle OBP soit droit. Connaissant ce poids P, peut-on graduer l'appareil? Établir la formule générale qui donne l'angle OBp en fonction du poids p. Calculer la sensibilité du pèse-lettre en fonction de p et étudier ses variations quand p croît de o à P. Déterminer la constante de l'appareil pour que la sensibilité soit la même aux deux extrémités de la graduation. Montrer que la graduation est alors symétrique par rapport à son milieu.

[Si θ désigne l'angle OBp, on a $\cot\theta = A + \frac{B}{p}$, A et B désignant deux constantes. La sensibilité est $\frac{-AP}{p^2 + A^2(P-p)^2}$. Pour qu'elle ait la même valeur pour $p = 0$ et pour $p = P$, il faut prendre $A = -1$. On a alors $\cot\theta = \frac{P-p}{p}$, ce qui met la symétrie en évidence.]

3. Étudier la stabilité et la sensibilité de la balance romaine. [Soient a', b', c' les distances des points du levier où sont appliqués les poids P, Q, Q' à la parallèle au levier menée par O, ces distances étant comptées positivement vers le bas. Si la balance s'incline de l'angle θ du côté de Q, le moment par rapport à O est

$$M = (Qb + Q'c - Pa)\cos\theta - (Pa' + Qb' + Q'c')\sin\theta.$$

Pour la stabilité, il faut que le coefficient de $\sin\theta$ soit positif. La posi-

tion d'équilibre s'obtient alors en annulant M. La sensibilité est la dérivée de la valeur correspondante de θ par rapport à Q. On pourrait aussi la déduire de la formule générale (7) du n° 152.]

4. On appelle e la distance du couteau B de la balance du n° 151 à la ligne OA qui joint les deux autres couteaux, cette distance étant comptée positivement si B se trouve du même côté que G. Soit x la surcharge qui fait dévier l'aiguille d'une division. Établir la formule

$$x = x_0 + \mathrm{P}\frac{e}{al}, \tag{1}$$

l désignant la longueur de l'aiguille, évaluée en prenant la longueur d'une division pour unité.

Soit maintenant y la division marquée par l'aiguille, quand on met le même poids P dans les deux plateaux, en supposant que l'aiguille soit au zéro quand les plateaux sont vides. Établir la formule

$$xy = \mathrm{P}f, \tag{2}$$

en posant $\frac{a}{b} = 1 + f$.

$\left(\text{Les nombres } \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \frac{\pi}{2} - \beta \text{ et } f \text{ doivent être supposés assez petits}\right.$ pour que leurs produits soient négligeables.)

5. L'aiguille d'une certaine balance se déplace d'une division, pour une surcharge de 1^{mg}, quand les plateaux sont vides. Quand il y a 100^{g} dans chaque plateau, la même surcharge ne donne plus qu'une déviation de $\frac{4}{5}$ de division. Calculer la distance e de l'exercice précédent, en supposant qu'une division vaut $\frac{1}{10}$ de millimètre, que la longueur du fléau est de 30^{cm} et la longueur de l'aiguille de 18^{cm} ($e = 0^{\mathrm{mm}},675$).

6. On reprend la balance précédente et, afin de contrôler sa justesse, on place 100^{g} dans chaque plateau. On constate que l'aiguille marque la division 38. Puis, on échange les deux poids et l'on obtient la division -22. Évaluer le nombre f de l'Exercice 4, ainsi que la différence des deux poids utilisés ($f = 1 : 10000$; la différence de poids est de $0^{\mathrm{g}},0375$).

7. Dans le but d'étudier la sensibilité et la justesse d'une balance, on fait les opérations suivantes. On place des poids marqués égaux P dans les deux plateaux. On lit la division n marquée par l'aiguille. On ajoute sur le plateau de gauche une surcharge de 1^{g}; on lit la nouvelle divi-

sion n'. On recommence l'opération, après avoir échangé les poids : on obtient ainsi les divisions m et m'. Le Tableau ci-dessous donne les résultats :

P.	n.	n'.	m.	m'.
0..........	0	21	0	20
50..........	0	15	1	19
100..........	5	20	−1	14
150..........	−2	13	7	19
200..........	10	3	13	27
250..........	8	23	−2	11
300..........	−13	0	21	31
350..........	9	17	−4	7
400..........	18	28	−8	−1
450..........	−6	4	14	25
500..........	−2	6	11	21
600..........	0	9	10	20
700..........	17	23	−4	5
800..........	1	7	9	17
900..........	−3	3	15	24
1000..........	−4	2	18	23

Sachant qu'une division vaut 1^{mm}, que la longueur de l'aiguille est égale à 15^{cm}, et que la longueur du fléau est de 23^{cm}, calculer la distance e et le nombre f de l'Exercice n° 4.

[On construira la droite représentée par l'équation (1) dudit exercice, en marquant, sur du papier quadrillé, les points correspondant aux différentes expériences et traçant une droite passant le plus près possible de tous ces points. On calculera ensuite les diverses valeurs de f, au moyen de la formule (2) et l'on en prendra la moyenne.]

8. Une poulie a 25^{cm} de diamètre. Son axe a 45^{mm} de diamètre. Le coefficient de frottement entre l'axe et la poulie est 0,14. Avec quelle force faut-il tirer sur un brin pour élever un poids de 40^{kg} attaché à l'autre brin. Calculer le rendement de la poulie.

9. On donne trois poulies A, B, C, de même rayon r. Les deux premières sont fixes et dans un même plan vertical. La troisième est mobile et supporte un poids P. Une corde fermée, de longueur l, est enroulée sur les trois poulies. Connaissant la distance c des centres A et B des deux premières poulies et l'angle aigu α que fait AB avec la verticale ascendante, déterminer la position d'équilibre du centre C de la troisième poulie. Calculer la tension de la corde et les réactions des poulies

fixes sur leurs axes. On néglige les frottements et les poids des poulies.

Application numérique :

$c = 2^{m}$; $\alpha = 60^{\circ}$; $l = 6^{m}$; $r = 10^{cm}$; $P = 50^{kg}$. (É.C., 1905.)

(On est ramené à résoudre un triangle, connaissant c, $a+b$ et $B + \frac{C}{2} = \alpha$. La condition de possibilité est $2c < l - 2\pi r$.)

10. Le travail nécessaire pour courber une corde sur une poulie n'est pas nul. Il en résulte que la tension P du brin menant doit dépasser la tension Q du brin mené d'une certaine quantité (abstraction faite du frottement de la poulie sur son axe), qu'on appelle la *raideur* de la corde et qui est donnée par la formule empirique

$$R = \frac{A + BQ}{D},$$

où D désigne le diamètre de la poulie et A et B deux coefficients numériques, qui dépendent de la corde considérée. Montrer qu'il revient au même d'admettre que le brin mené se raccorde progressivement à la poulie de telle manière que lorsqu'il est parallèle au brin menant, sa distance au centre dépasse le rayon de la quantité $h = \frac{A + BQ}{2Q}$.

Application numérique. Pour une corde goudronnée de 30 fils, $A = 0,350$ et $B = 0,0126$, Q et R étant évalués en kilogrammes et D en mètres. Calculer la distance h pour une poulie de 30^{cm} de diamètre et pour une charge Q égale à 200^{kg}. Quel est le rendement de cette poulie, en supposant, en outre, que son axe a 70^{mm} de diamètre et que son coefficient de frottement est 0,12?

11. Pour freiner un arbre qui tourne, on enroule sur cet arbre une corde, dont une extrémité est fixe et l'on tire sur l'autre extrémité. Calculer le *moment de freinage*. Application numérique : Le diamètre de l'arbre est de 20^{cm}; on tire sur la corde avec une force de 25^{kg} et l'on veut obtenir un moment de freinage égal à 3 kilogrammètres. Calculer l'angle d'enroulement. Le coefficient de frottement est 0,25. (On supposera successivement que la corde est enroulée dans le sens de la rotation de l'arbre, puis dans le sens opposé.)

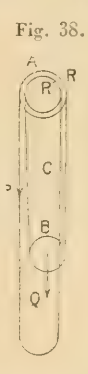
12. Une poulie tourne à la vitesse de 1300 tours par minute. Son diamètre est de 20^{cm}. Elle entraîne une courroie en cuir de 7^{mm} d'épaisseur

et de densité 1,1. L'angle d'enroulement est de 175°. Le coefficient de frottement est 0,3. La puissance transmise est de 15 chevaux. Calculer la largeur minimum que doit avoir la courroie, sachant qu'elle peut résister à une traction de 40^{kg} par centimètre carré. On tiendra compte de la force centrifuge. (*Cf.* Exercice proposé n° 43 du Chapitre IX.)

13. Dans un palan, la moufle supérieure comprend $n+1$ poulies et la moufle inférieure en comprend n. Le dernier brin de la corde est attaché à la chape de la moufle inférieure. Calculer le rapport $\frac{P}{Q}$.

14. *Un palan différentiel* est constitué par une poulie fixe A à deux gorges, de rayons R et R′ très voisins (*fig.* 38) et par une poulie mobile

Fig. 38.



ordinaire B. Une chaîne passe sur les trois gorges, comme l'indique la figure. Les gorges de A sont munies d'empreintes pour éviter le glissement de la chaîne, malgré que le brin C ait une tension négligeable, qui résulte de son propre poids. Calculer le rapport $\frac{P}{Q}$ en négligeant d'abord le frottement. Puis, calculer les limites entre lesquelles il doit être compris pour que le palan reste en équilibre, en tenant compte du frottement de A sur son axe. Quelle valeur doit avoir P pour que B monte? Quelle est la condition pour que le palan reste en équilibre, quand on cesse d'exercer la force P, tout en maintenant Q? Quelle est la limite supérieure du rendement dans cette hypothèse? [Si r désigne le rayon de l'axe, on a, en gardant les notations du n° 156,

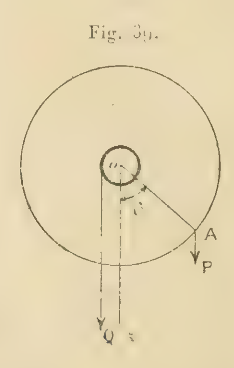
$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{R - R'}{2} + r \sin\alpha}{R - r \sin\alpha}.$$

B monte dès que $\frac{P}{Q}$ atteint la valeur obtenue en remplaçant α par l'angle de frottement φ. L'arc-boutement a lieu si $R - R' < 2r \sin\varphi$. La limite supérieure du rendement est $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R - R'}{2R}\right)$; elle est un peu plus petite que $\frac{1}{2}$; *cf.* n° 134.]

15. Le treuil différentiel est constitué par deux cylindres de même axe et de rayons R et R′ très voisins, sur lesquels la corde s'enroule en sens inverse, chacune de ses extrémités étant fixée à l'un des cylindres. Une poulie mobile repose sur cette corde et supporte le poids Q à soulever. Trouver la condition d'équilibre, sans frottement et en tenant compte du frottement des tourillons. Chercher la condition d'irréversibilité. (*Cf.* Exercice précédent.)

16. *Treuil des carriers.* — Un homme monte le long de la circonférence de rayon R. Le poids Q est attaché à une corde qui s'enroule sur un cylindre de rayon R′. Trouver les positions d'équilibre. Quelle est la position stable? Chercher l'arc d'équilibre, en tenant compte du frottement des tourillons. Montrer que sa projection sur le diamètre horizontal a pour milieu la projection de la position d'équilibre sans frottement. [Si θ désigne l'angle zOA, on a, en gardant les notations du n° 142,

Fig. 39.



$$\sin\theta = \frac{QR' \pm (P + Q) r \sin\alpha}{PR}.$$

Les extrémités de l'arc d'équilibre sont obtenues pour $\alpha = \pm\varphi$.]

17. Calculer les réactions sur les deux tourillons, dans le treuil ordinaire. Puis chercher les conditions d'équilibre, en tenant compte du frottement. Calculer le rendement quand le poids Q monte d'un mouvement uniforme. Entre quelles limites varie ce rendement quand la manivelle fait un tour complet? Examiner le cas où le treuil est actionné par un couple.

18. Un treuil, de 30^{cm} de diamètre, doit soulever une charge de 600^{kg}. Il est actionné par l'intermédiaire d'un engrenage, comprenant une roue de $1^m,05$ de diamètre, solidaire du treuil, engrenant avec une roue de 15^{cm} de diamètre, solidaire de la manivelle. Celle-ci a 40^{cm} de long. Calculer la force qui doit être appliquée normalement à son extrémité, en négligeant les frottements. Calculer également l'effort sur les dents en contact, ainsi que les réactions sur les tourillons, en supposant que la corde est à 70^{cm} du tourillon de droite et à $1^m,30$ du tourillon de gauche, que le plan de l'engrenage est à 20^{cm} à gauche du tourillon de gauche et que le contact a lieu au point le plus bas de la grande roue.

19. Un volant de 2^t tourne à 150 tours par minute. Son centre de gravité est à 8^{mm} de l'axe. Sachant que l'axe est horizontal, que les tourillons ont 10^{cm} de diamètre et que leur coefficient de frottement sur les coussinets est de 0,07, calculer la puissance perdue par le frottement. Où doit-on placer un poids de 100^{kg} pour équilibrer le volant? Que devient alors la puissance perdue?

20. On applique aux roues extrêmes d'un train d'engrenages des couples C et C'. Quelle est la condition d'équilibre, si l'on connaît la raison? (*Cf.* Exercice proposé n° 20 du Chapitre III.)

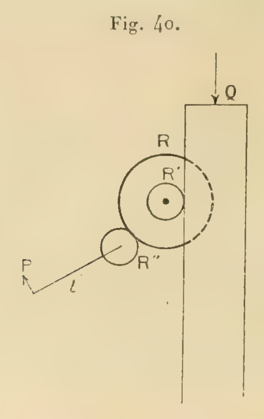
21. Montrer que, dans un engrenage conique, la condition d'équilibre est donnée par la même règle que dans un engrenage plan, ainsi que l'effort sur les dents.

22. Une vis sans fin engrène avec une roue de rayon R. On applique à la vis un couple C et à la roue un couple C'. Condition d'équilibre, en négligeant le frottement. (Travaux virtuels.)

23. Un *cric* est constitué par une crémaillère (*fig.* 40), qui engrène avec une roue de rayon R'. Cette roue est solidaire d'une autre roue, de rayon R, qui engrène à son tour avec une roue de rayon R'', solidaire d'une manivelle, de longueur *l*. Quelle force faut-il appliquer normalement à l'extrémité de la manivelle pour soulever un poids donné Q? (Travaux virtuels.)

24. Quelle est la charge maximum que peut traîner, en la remontant sur un plan incliné, un cheval exerçant, parallèlement à une ligne de plus grande pente, une traction T? Quel est le poids minimum que doit

Fig. 40.



avoir le cheval? On appelle f et f' les coefficients de frottement de la charge et du cheval sur le plan. Application numérique :

$$T = 110^{kg}, \qquad f = 0,05, \qquad f' = 0,3, \qquad \text{tang}\, i = 0,03.$$

(É. C., 1903.)

25. Deux poids P et Q sont posés sur un même plan incliné. Ils sont reliés par une corde qui passe sur une poulie fixe dans le plan, de manière que les deux brins soient parallèles aux lignes de plus grande pente. Condition d'équilibre. (Si f et f' sont les coefficients de frottement, on doit avoir, en supposant $P > Q$, $\text{tang}\, i < \dfrac{Pf + Qf'}{P - Q}$.)

26. Même problème, en supposant les deux poids posés sur des plans inclinés différents ayant leurs horizontales parallèles, la poulie étant placée perpendiculairement à leur intersection.

27. Quelle force verticale faut-il exercer sur un coin, dont l'angle au sommet est de 30°, pour produire une force horizontale de 500^{kg}, sachant que le coefficient de frottement est de 0,40?

28. Calculer le rendement de la vis. Étudier ses variations avec le pas. Calculer sa limite supérieure pour une vis de serrage.

[Avec les notations du n° 169, le rendement est $\tan i \cot(i+\varphi)$. Sa dérivée par rapport à i a le signe de $\cos(2i+\varphi)$. Pour une vis de serrage, $i<\varphi$, la limite supérieure du rendement est $\frac{1}{2}(1-f^2)$. Elle est inférieure à $\frac{1}{2}$, conformément au n° 134.]

29. Un vérin est constitué par une vis verticale, sur l'extrémité de laquelle appuie une charge de 2^t qu'il s'agit de soulever. La vis est actionnée par une manivelle de 40^{cm} de long. Quelle force doit-on appliquer normalement à son extrémité? Quel est le rendement du vérin? Quel travail faut-il fournir pour soulever la charge de 1^m? Le pas de la vis est de 6^{mm}. Son diamètre est de 40^{mm}. Son coefficient de frottement est 0,12.

30. L'écrou du vérin ci-dessus a 30^{mm} de hauteur. Calculer la charge maximum qui peut être soulevée, sans craindre l'arasement des filets. On suppose que le filet est carré et a pour hauteur la moitié du pas. Sa résistance pratique au cisaillement est de 8^{kg} par millimètre carré. [On pourrait employer la formule (39) du n° 169. Il est plus simple et pratiquement aussi exact de considérer la charge comme répartie uniformément sur une surface égale à la moitié de la surface intérieure de l'écrou.]

31. Un rectangle ABCD glisse entre deux glissières G et G′, dont la distance est un peu plus grande que la hauteur BC du rectangle. En son centre O sont appliquées une force P, parallèle aux glissières, et une force Q, faisant l'angle aigu α avec la direction opposée à P et dirigée, pour fixer les idées, du côté de G. A partir de quelle valeur du rapport $\frac{P}{Q}$ le rectangle se met-il en mouvement dans le sens de P? Quelle forme faut-il donner au rectangle pour avoir le plus petit rapport? (Supposons que AB soit voisin de G et ait le sens de P. *A priori*, quatre cas sont possibles, le contact avec les glissières pouvant avoir lieu le long de AB, le long de CD, en A et C ou en B et D. Introduire les composantes normales des réactions. On peut les calculer, dans chaque hypothèse, ainsi que le rapport $\frac{P}{Q}$. En remarquant que les réactions normales doivent être positives, on constate que le deuxième et le troisième cas sont toujours impossibles. Le premier est possible si $AB > f.BC$, et le quatrième quand on a l'inégalité contraire. Le premier est le plus avantageux.)

32. Un *embrayage à cônes* est constitué par un cône creux A, dans lequel vient s'emboîter un tronc de cône B, de même angle au sommet 2α que A. Un ressort pousse B vers le sommet de A avec une force F. Sachant que A tourne à une vitesse de n tours par minute et transmet une puissance de W chevaux, calculer le minimum de F pour que A entraîne B sans glissement. Calculer la longueur l de l'arête de B de manière que la pression moyenne entre les deux cônes soit p kilogrammes par centimètre carré. Application numérique :

$$W = 15, \qquad f = 0,2, \qquad \alpha = 11^\circ, \qquad n = 500, \qquad p = 1,5,$$
$$\text{rayon moyen de B} = 15^{\text{cm}}.$$

(Calculer le moment des forces de frottement par rapport à l'axe des deux cônes, à l'instant où le glissement par rotation va se produire. On trouve $F = W\dfrac{225000 \sin\alpha}{\pi f r n}$, r désignant le rayon moyen en centimètres. Puis $l = W\dfrac{112500}{\pi^2 f r^2 n p}$ en centimètres. Pour l'application numérique, on trouve $F = 137^{\text{kg}}$, $l = 51^{\text{mm}}$.)

33. Un plateau circulaire, de rayon R, mû par un moteur de W chevaux, tourne autour de son centre à la vitesse de n tours par minute. Un galet, dont le plan est perpendiculaire au plateau et dont l'axe est fixe, est appuyé tangentiellement à la circonférence du plateau, avec une force normale de F kilogrammes. Calculer le minimum de F pour que le galet tourne autour de son axe sans glisser sur le plateau.

34. On considère la bielle de l'Exercice résolu n° 3 du Chapitre III. Calculer le couple moteur appliqué à la manivelle en fonction de la pression totale P sur le piston. Calculer également la tension de la bielle. [Si l'on néglige les frottements, appliquer les travaux virtuels; on trouve immédiatement

$$C = P\frac{v'}{\omega} = PR\sin u(1 + e\cos u),$$

en appliquant la formule (7) de l'exercice précité. Si l'on appelle f le coefficient de frottement de la coquille B du piston sur les glissières, en supposant qu'on se trouve dans le cas favorable de l'Exercice n° 31, on a un couple C′ lié au précédent par la formule

$$C' = C\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - f\sin\varphi} = C(1 + fe\sin u),$$

au troisième ordre près. La tension est

$$\frac{-\mathrm{P}}{\cos\varphi - f\sin\varphi} = -\mathrm{P}\left(1 + fe\sin u + \frac{1}{2}e^2\sin^2 u\right).$$

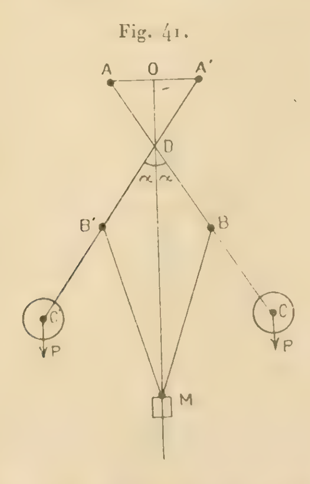
Il faut prendre u compris entre o et π, la tension étant une compression quand B va vers O et une véritable tension dans le mouvement opposé. On a négligé le poids de la bielle.]

35. Une chaudière cylindrique de rayon R renferme de la vapeur à la pression de p kilogrammes par centimètre carré. Calculer la tension moyenne du métal par millimètre carré d'une section droite, puis d'une section méridienne. Si la chaudière éclate, comment se produira vraisemblablement la rupture? Quelle épaisseur faut-il donner à une chaudière de 1^{m} de diamètre, si l'on veut que la tension moyenne du métal ne dépasse pas 3^{kg} par millimètre carré, en supposant $p = 2,5$? (La résultante des tensions du métal doit être égale à la résultante des pressions de la vapeur. On trouve $\frac{p\mathrm{R}}{2e}$ et $\frac{p\mathrm{R}}{e}$.)

36. Établir l'équation d'équilibre du régulateur de Watt, en tenant compte du poids du collier C.

37. La figure 41 représente le *régulateur de Farcot*. Les articulations

Fig. 41.



sont en A, A′, B, B′, M. On détermine les dimensions des tiges de manière que la vitesse angulaire d'équilibre ait un minimum égal à la

vitesse de régime normal de la machine. Il en résulte qu'au voisinage de cette vitesse normale, la vitesse d'équilibre du régulateur est sensiblement constante, ce qui est un avantage précieux pour certaines machines. On dit que le régulateur est sensiblement *isochrone*.

[En négligeant le poids du manchon M, posant

$$AB = a, \qquad AC = b, \qquad OA = c, \qquad \widehat{MDB} = \alpha,$$

la vitesse d'équilibre est donnée par

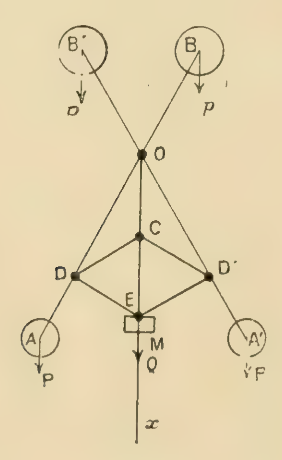
$$\omega^2 = g \frac{\sin\alpha}{(b\sin\alpha - c)\cos\alpha}.$$

Le minimum de ω^2 a lieu pour un angle β tel que $c = b\sin^3\beta$; il est égal à $\Omega^2 = \frac{g}{b\cos^3\beta}$. Si $\alpha = \beta + \varepsilon$, on a, au troisième ordre près,

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + 2\varepsilon^2 \operatorname{tang}^2\beta).]$$

38. La figure 42 représente le *régulateur de Rankine*, qui est *rigoureusement isochrone*.

Fig. 42.



Les articulations sont en O et C, qui sont fixes, et en E, D, D', qui sont mobiles, le manchon M coulissant le long de Ox et D, D' glissant dans des rainures pratiquées dans OA et OA'. Les boules ont des poids tels que leur centre de gravité est en O. De plus, le

côté du losange CDED' est égal à la distance OC. $\left(\text{On trouve}\right.$

$$\left.\omega^2 = \frac{4Qcg}{Pa^2+pb^2} \quad \text{en posant} \quad OA = a, \quad OB = b, \quad OC = CD = c.\right)$$

39. Un volant tourne avec la vitesse angulaire ω. Calculer la tension que donne la force centrifuge par millimètre carré d'une section diamétrale. Application numérique : volant en fonte de densité 7,1, de diamètres extérieur et intérieur $2^{m},40$ et 2^{m}. Calculer le nombre de tours maximum par minute, si l'on veut que la tension ne dépasse pas $2^{kg},5$.

[La résultante des tensions sur une section diamétrale doit équilibrer la force centrifuge sur la moitié du volant. En négligeant les rayons et supposant le volant de forme cylindrique, on trouve que la tension par millimètre carré est

$$\frac{\omega^2 D}{3000g}(R^2 + R'^2 + RR'),$$

D étant la densité et R et R' les rayons en mètres. Avec les données numériques, la vitesse ne doit pas dépasser 510 tours par minute.]

40. Déterminer la forme d'équilibre d'un fil dont chaque élément est soumis à un poids proportionnel à sa projection horizontale.

[Câble d'un *pont suspendu*. Si p désigne le poids du tablier par unité de longueur, on a

$$T\cos\alpha = \text{const.} = a, \qquad \frac{d(T\sin\alpha)}{ds} = p\cos\alpha.$$

En éliminant T on trouve ds, puis

$$x = \frac{a}{p}\tan g\alpha, \qquad y = \frac{a}{2p}\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

La courbe est une parabole.]

41. On considère une chaîne constituée par des barres

$$01, \quad 12, \quad 23, \quad \ldots; \quad n-1, \quad n,$$

dont chacune est articulée avec la suivante en leur extrémité commune. A chaque articulation (ou *nœud*) est appliqué un poids p. De plus, les longueurs des barres sont choisies de telle manière que, dans la position d'équilibre, elles aient toutes des projections horizontales égales à une

même constante a. Enfin, on suppose que l'extrémité n de la chaîne est au même niveau que l'extrémité o. Calculer les coordonnées du sommet i en prenant pour axe des x l'horizontale on et pour axe des y la verticale descendante de o. On néglige les poids des barres vis-à-vis de p.

[On suppose que chaque articulation est entièrement libre, c'est-à-dire que l'axe qui relie deux barres consécutives exerce sur chacune d'elles une réaction unique, sans aucun couple. Cette réaction est la *tension de la barre*. Pour chaque barre, les deux tensions doivent se faire équilibre. En chaque nœud, l'axe d'articulation doit être en équilibre sous l'action du poids p et des deux tensions. En écrivant toutes ces conditions et éliminant les tensions, on trouve une formule de récurrence entre les coefficients angulaires de deux barres consécutives

$$m_{i+1} - m_i = - m,$$

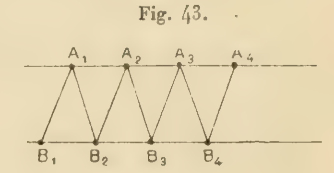
m étant une constante. On en déduit m_i, puis on calcule x_i et enfin y_i. On trouve

$$x_i = ia, \qquad y_i = ib - ma\frac{i(i-1)}{2},$$

b désignant encore une constante. Tous les nœuds sont sur une même parabole. C'est encore le problème du *pont suspendu*.]

42. On considère la poutre représentée par la figure 43. On suppose

Fig. 43.

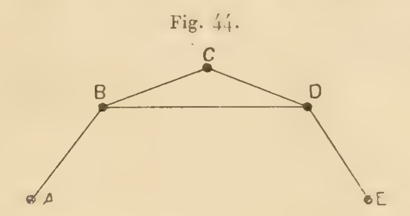


qu'en chaque nœud les quatre barres aboutissantes sont librement articulées. Une charge uniforme de p kilogrammes est appliquée à chacune des barres horizontales supérieures. Calculer les efforts dans les différentes barres et dire si ce sont des tensions ou des compressions. On néglige le poids des barres. Application numérique : tous les triangles sont isoscèles et ont chacun $0^m,85$ de base et $1^m,10$ de hauteur. Il y a 13 nœuds A et 14 nœuds B. Le poids p est de 1^t. Quelle section doit avoir chaque barre, si l'on veut que l'effort longitudinal dans chacune d'elles ne dépasse pas 6^{kg} par millimètre carré? [Chaque barre horizontale supérieure exerce sur l'axe d'articulation qui est à chaque extrémité

une force égale à $\frac{p}{2}$. Aux nœuds extrêmes inférieurs s'exercent les réactions des points d'appui. On part du nœud B_1. La réaction en ce point se décompose suivant B_1A_1 et B_1B_2. On passe ensuite à A_1 ; sa condition d'équilibre donne les tensions dans A_1B_2 et A_1A_2. Puis on passe à B_2, A_2, ...]

43. La *ferme* représentée par la figure 44 supporte une charge verti-

Fig. 44.



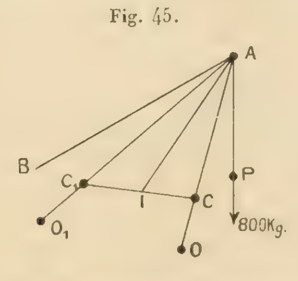
cale de 3^t sur chacune des poutres AB, BC, CD, DE. Calculer les efforts longitudinaux dans chaque poutre et les composantes horizontales et verticales des réactions sur les appuis A et E. Refaire le même calcul, en supposant qu'en plus des forces ci-dessus on ait une pression normale de 2000^{kg} sur AB et de 500^{kg} sur BC. On néglige le poids des poutres et l'on suppose des articulations parfaites en A, B, C, D, E. Données numériques :

$$AB = BC = CD = DE = 3^m; \qquad BD = 5^m,50; \; AE = 9^m.$$

(Transporter les charges aux nœuds. Calculer les réactions verticales en A et E. Puis écrire l'équilibre de chaque nœud en partant de A.)

44. La figure 45 représente une *chèvre* constituée par deux tiges

Fig. 45.



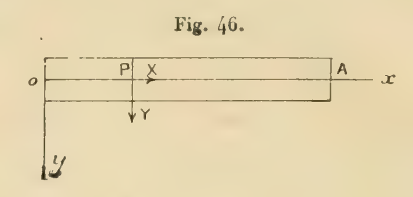
égales OA et O_1A, de 6^m de long et dont l'écartement horizontal OO_1 est de $2^m,5$. Elles sont reliées par un *tirant* CC_1, tel que

$$OC = O_1C_1 = 1^m,20.$$

L'inclinaison du plan de la chèvre est 45°. Elle est maintenue au moyen d'une corde AB, située dans le plan de symétrie et faisant 25° avec le plan horizontal. Un treuil, ayant pour axe CC_1, sert à enrouler une corde, qui passe sur une poulie fixe en A, puis sur une poulie mobile P et enfin vient s'attacher en A. A la poulie P est suspendue une charge de 800^{kg}. Calculer la tension de AB, les compressions de AC, AC_1, OC, O_1C_1 et la tension de CC_1.

45. Une poutre est soumise à des forces admettant le plan xOy pour plan de symétrie (*fig.* 46). On considère une section droite quelconque P

Fig. 46.



de cette poutre. Les forces extérieures appliquées sur la partie PA de la poutre peuvent être réduites à une force (X, Y) appliquée en P et à un couple, de moment M. Ces forces font équilibre aux réactions élastiques exercées, le long de la section considérée, par la partie OP de la poutre sur la partie PA. La composante X s'appelle la *tension* en P; Y s'appelle l'*effort tranchant* et M s'appelle le *moment fléchissant*. Démontrer que l'effort tranchant est, au signe près, la dérivée du moment fléchissant par rapport à la distance $OP = x$. (Écrire les conditions universelles pour la portion de poutre comprise entre les plans x et $x + dx$.)

46. On démontre, dans la Résistance des matériaux, que le moment fléchissant précédent est proportionnel à la courbure de la *fibre neutre* (lieu des centres de gravité des sections droites) en P, si cette fibre est rectiligne à l'état naturel. Calculer la forme que prend la poutre, si elle est encastrée en O et si elle est seulement soumise à un poids P appliqué en A. (On a sensiblement $M = Ky''$. Il suffit donc de calculer M en fonction de x et d'intégrer deux fois. L'encastrement signifie que la tangente en O est Ox.)

FIN.

ERRATA.

Tome I (*Exercices*).

Page 58, remplacer la ligne 16 par : La limite demandée est toujours $1 - \alpha$.
Page 60, ligne 5, supprimer la troisième fonction.
Page 81, ligne 1, *au lieu de* il faut varier, *lire* il faut faire varier.
Page 140, lignes 12 et 18, *au lieu de* 182, *lire* 3×182.
Page 140, ligne 18, *au lieu de* 423, *lire* 59.
Page 155, ligne 11, *au lieu de* 4, *lire* $\frac{1}{16}$ et *au lieu de* 2, *lire* $\frac{1}{4}$.

Tome II (*Exercices*).

Page 34, dernière ligne, *au lieu de* $\wedge$, *lire* A.
Page 61, Exercice 11, supprimer les bissectrices.
Page 63, ligne 4 en remontant, *au lieu de* 18, *lire* 38.
Page 72, ligne 3 en remontant, *au lieu de* 3,01, *lire* 0,18; *au lieu de* 9,34, *lire* 0,315.
Page 72, dernière ligne, *au lieu de* 3,06, *lire* 0,561.
Page 75, ligne 17, supprimer les mots : les plans perpendiculaires à OA, OB, OC, ainsi que.
Page 95, ligne 1, *au lieu de* polygones, *lire* polygones plans.
Page 169, ligne 11, *au lieu de* 7, *lire* 6.
Page 192, lignes 1 et 2 en remontant, *au lieu de* L'intervalle de variation réduit se compose ..., *lire* L'intervalle de variation réduit est $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.
Page 197, ligne 13, au dénominateur de la dernière fraction, *au lieu de* $(1 + 2\cos 2\omega)$, *lire* $(1 + 2\cos 2\omega)^2$.
Page 200, ligne 3 en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$, *lire* $\frac{2}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$.
Page 204, la figure doit subir une rotation de 180°.
Page 205, ligne 6, *au lieu de* une équation, *lire* un trinome.
Page 207, ligne 9, *au lieu de* 20, *lire* 10.
Page 224, ligne 19, *au lieu de* cx^2, *lire* cy^2.
Page 224, supprimer les lignes 22 et 23.
Page 281, ligne 5 en remontant, *au lieu de* le nouveau plan des zx, *lire* le plan $y = \frac{R_2}{2}$.
Page 303, dernière ligne, *au lieu de* $Rx^2 = 1$, *lire* $R = x^2$.
Page 326, ligne 5 en remontant, *au lieu de* proposé, *lire* résolu.

Page 329, ligne 23, *supprimer* Génératrices doubles et inflexionnelles.

Page 338, ligne 2 en remontant, *au lieu de* VIII, lire XIV.

Page 380, supprimer le terme λ dans les équations (3) et (4) du n° 1 et dans les équations (3), (4) et (8) du n° 2.

Page 392, ligne 4 en remontant, *ajouter* en prenant $\lambda = 1$.

Page 491, ligne 24, *au lieu de* ρ^2, *lire* $\rho^2 \omega^2$.

Page 491, ligne 29, *au lieu de* SM, *lire* SP.

Page 496, Exercice 7, supprimer la deuxième phrase.

Page 496, ligne 8, *supprimer* et C le centre de courbure correspondant.

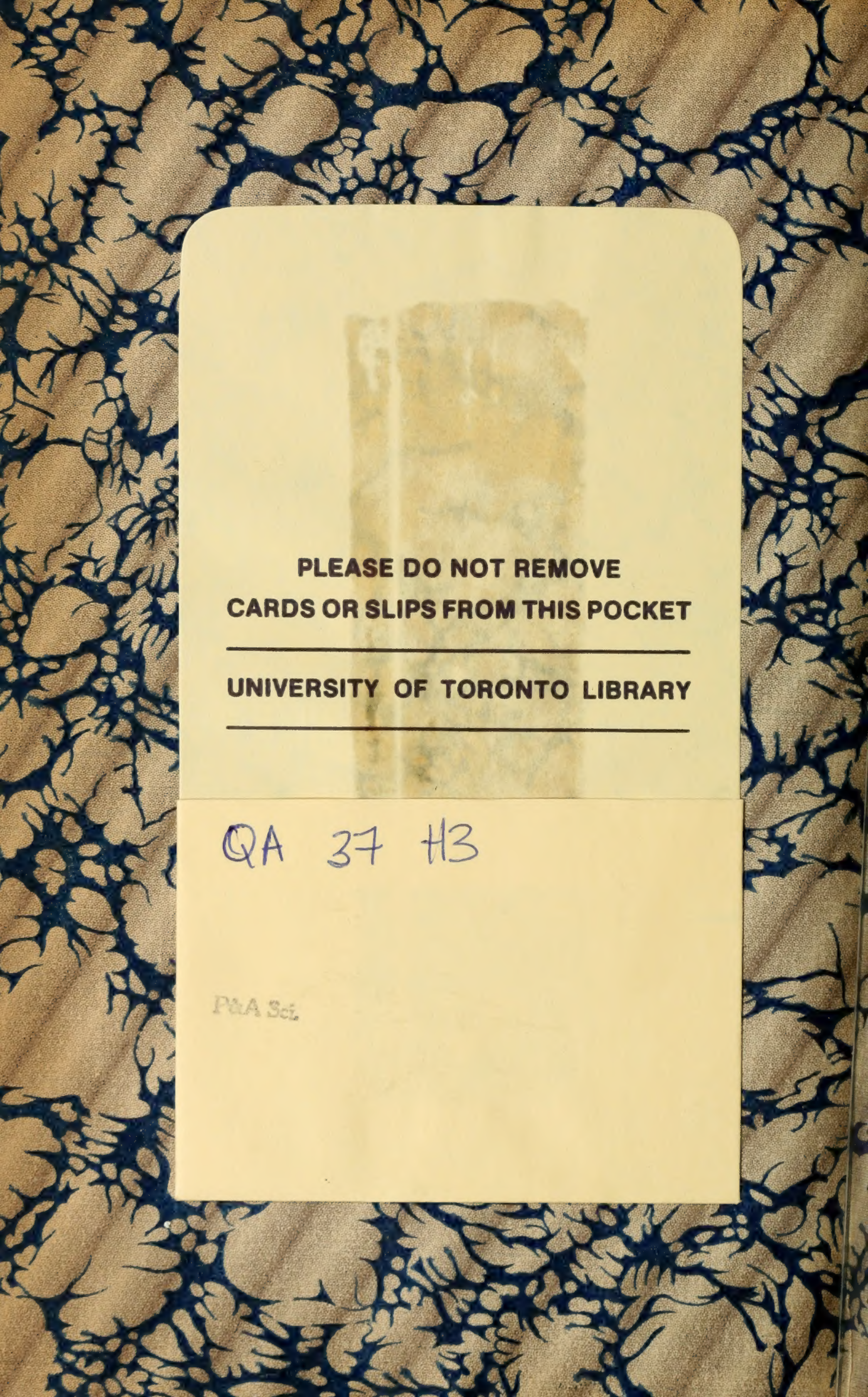
Page 496, lignes 9 et 10, *au lieu de* l'aire du triangle OMC, *lire* la moitié de l'aire du triangle rectangle dont OM est un côté de l'angle droit et dont l'hypoténuse est tangente en M à la spirale.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

67490 Quai des Grands-Augustins, 55.


PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
QA 37 H3
P&A Sci.



